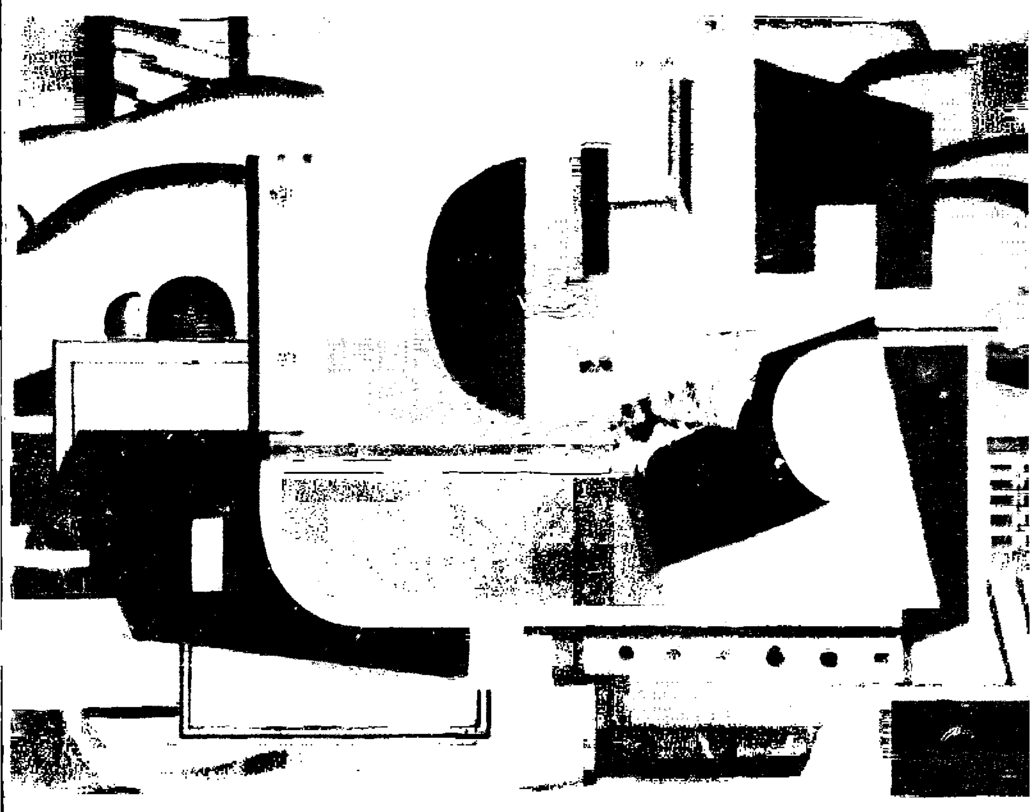
Jean PIAGET y col.

investigaciones sobre la generalización

(estudios de epistemología y psicología genéticas)



LA RED DE JONAS

PREMIA EDITORA

Jean PIAGET y col.

investigaciones sobre la generalización

(estudios de epistemología y psicología genéticas)

Investigaciones sobre la generalización es uno de los más amplios estudios de Jean Piaget acerca de los procesos de pensamiento y la creación de las estructuras mentales que lo sustentan dentro del proceso de abstracción cognoscitiva. Estudio minucioso, de amplia base científica, trata de definir y profundizar en la naturaleza del conocimiento para explorar, a través de sus diferentes formas, de acuerdo al uso que da la mente a un concepto, las posibilidades de la abstracción, tanto para la reflexión acerca del objeto de la ciencia y la lógica matemática, como para la abstracción acerca de hechos y relaciones empíricas. Pocos trabajos abordan con tal claridad y rigor uno de los problemas del conocimiento que más han llamado la atención de los investigadores del tema durante las últimas décadas. Asimismo, conviene subrayar la importancia del tema en el campo del aprendizaje y la pedagogía. En este sentido, *Investigaciones sobre la generalización* abre nuevas posibilidades para la comprensión y adaptación de diversas series de fenómenos en el área de la enseñanza debido a la amplitud con que se trata la continua dificultad, en algunos casos, para procesar y comprender una serie de significados que a través del uso de estructuras diferentes permiten una más amplia comprensión de los postulados propuestos. En suma, *Investigaciones sobre la generalización* es un libro que influirá definitivamente tanto en la teoría del conocimiento como en su comprensión por parte de los interesados en la comprensión del fenómeno cognoscitivo y sus aplicaciones.

ganz1912

Jean PIAGET y colaboradores

investigaciones sobre la generalización

(estudios de epistemología y psicología genética



premià
la red de jonás 1984

Título original: *Recherches sur la géneralisation*
Traducción: *Fabienne Brandu*
Diseño de la colección: *Pedro Tanagra R.*

ganz1912

Primera edición en castellano: 1984

ISBN 2-13-035507-2 de la edición original publicada por Presses Universitaires de France.

ISBN 968—434—321—3

Premiá editora de libros, S. A.
Tlahuapan, Puebla.
(Apartado Postal 12-672
03020 México, D. F.).

Impreso y hecho en México
Printed and made in Mexico

INTRODUCCION

Las anteriores investigaciones de nuestro Centro, acerca de las diversas formas de la abstracción, requerían naturalmente un análisis complementario de las variedades de la generalización y, en realidad, la relación entre las primeras y las segundas resultó ser también muy estrecha. Pero, no por tanto tuvimos la impresión de ser repetitivos ya que el estudio de los procesos generalizadores nos lleva más allá en el examen de lo que sigue constituyendo los dos grandes misterios del conocimiento: el hecho de que engendra estructuras constantemente nuevas, en el sentido en que no están contenidas en las iniciales, sino que, una vez construidas, aparecen como el producto necesario de las primeras; y que dicha construcción siempre se apoya en lo que está en proceso de devenir, por consiguiente en lo que aún no está acabado, de una manera más frecuente y casi constante que en lo adquirido anteriormente.

Tratándose de la abstracción, tuvimos que distinguir dos formas principales. La primera, llamada "empírica", consiste en sacar su información de los objetos mismos de los cuales sólo se consideran ciertas propiedades, o sea aquellas que existían en ellos antes de cualquier constatación por parte del sujeto (por ejemplo el color o el peso). La segunda, llamada "reflejante", no procede a partir de los objetos sino de la coordinación de las acciones que el sujeto ejerce sobre los mismos - allí está la diferencia con lo anterior -, o de las operaciones en general del sujeto. Por consiguiente, consiste primero en reflejar, en el sentido de una "transposición" en un nivel superior, lo que se saca de lo inferior, y, por otra parte, en reflexionar, en el sentido de una "reflexión" mental cuyo papel complementario es reconstruir en el nuevo plan lo abstracto que está contenido en el primero. De allí surge la necesidad de una reorganización en vista de una nueva estructuración.

Si no hay duda sobre este punto, y cada uno reconocerá en esa distinción la diferencia que opone la abstracción lógico-matemática con las abstracciones en juego en los procesos experimentales, tam-

poco cabe duda de que existirán asimismo por lo menos dos formas de generalizaciones. La que parte de lo observable contenido en los objetos, por tanto, abstracciones empíricas, y que se remite a ellos para averiguar su validez de las relaciones observadas, con el fin de establecer su grado de generalidad y sacar de ello previsiones posteriores (pero sin tratar aún de encontrar explicaciones o "razones", lo que nos llevaría a superar lo observable). Esta forma es de naturaleza esencialmente extensiva y consiste en proceder del "alguno" a "todos" o del "hasta aquí" a "siempre": la llamaremos "generalización inductiva", estando conscientes de los problemas que plantea tal terminología. En cambio, cuando la generalización se funda en o se refiere a las operaciones del sujeto o a sus productos, su naturaleza es en ese caso simultáneamente comprensiva y extensiva, y conduce entonces a la producción de nuevas formas e incluso, a veces, de nuevos contenidos. (cf. los números y sus múltiples variedades). Estos contenidos surgen de esas formas pero no son dados en lo observable empíricamente. Las llamaremos "generalizaciones constructivas", y lo esencial de esta obra insistirá en su formación y su mecanismo.

En efecto, la inducción ya fue objeto de las investigaciones de B. Inhelder[1], y por tanto, no tenemos que preguntarnos cuáles son los métodos seguidos por los sujetos para generalizar los hechos, relaciones o leyes que descubren en la realidad. En cambio, para poder entender el papel fundamental de la generalización constructiva, será conveniente recordar que en las inducciones mismas, cuando un sujeto establece una relación entre una variable "y" y una variable "x", y averigua la constancia de dicha relación, este procedimiento extensivo siempre supone un marco de asimilación anterior, debido a las actividades del sujeto y que, en el presente caso, corresponde a relaciones funcionales. Si $y = f(x)$, este marco es la función "f" misma, en tanto que permite la unión de los contenidos "x" e "y" y de sus variaciones. Estas variables, sus variaciones y la existencia misma de sus relaciones pertenecen al campo de lo observable, pero el poder establecer las relaciones se debe a las acciones u operaciones del sujeto (pero simplemente "aplicadas" y no todavía "atribuidas" causalmente a los objetos), y por tanto resulta de generalizaciones constructivas anteriores (interviniendo después de los morfismos o correspondencias sensorio-motrices).

Ante todo y por otra parte, podemos notar que por tan elementales y generales que puedan ser estos marcos "constructivos" necesarios a la asimilación de las relaciones establecidas "inductivamente", sólo se trata aquí del resultado, en términos de generalizaciones, de

[1] B. Inhelder y J. Piaget, *De la logique de l'enfant á celle de l'adolescent*. PUF.

los que ya observamos en el campo de la abstracción: toda abstracción empírica, o sea lo que constituye la lectura de las propiedades de un objeto, supone pues la utilización de predicados, relaciones, clases, etc., por consiguiente de "formas" necesarias para la asimilación de los contenidos observables. Dichas formas, en tanto que condiciones previas, contienen un *mínimo* de abstracciones reflejantes anteriores, por más inconscientes que sean. Volvemos a encontrar esta misma relación entre las generalizaciones inductivas y las constructivas, por más pobres que aparezcan esas últimas en los principios del desarrollo, en oposición con la relevancia inicial sistemática de las simples inducciones empíricas. Todo nuestro esfuerzo se centrará entonces en la formación de generalizaciones constructivas cada vez más ricas, y sobre el mecanismo que las conduce a la creación continua de novedades, tanto en lo que se refiere a los contenidos como a las formas.

Los capítulos I y II de la presente obra examinarán las cuestiones en el campo de la lógica, los capítulos III y IV, en el campo numérico (razonamientos recurrentes), los capítulos VI-IX en coordinaciones espaciales; el capítulo X con relación a un problema casi probabilístico y los capítulos XI-XIII en el plano de las explicaciones físicas. Ya que los capítulos III-V ofrecen una lectura más fácil que I-II, pensamos en empezar por ellos (lo que puede hacer el lector), pero decidimos conformarnos con el orden jerárquico de los problemas.

Es inútil subrayar que si el autor de esas líneas redactó la totalidad de la obra, los colaboradores tuvieron un papel fundamental en el desarrollo y muchas veces en la invención misma de las experiencias.

J.P.

P.D. Queremos agradecer calurosamente al Fondo Nacional Suizo de la Investigación Científica y a la Fundación Ford que contribuyeron con gran lealtad al financiamiento de los trabajos de nuestro Centro.

CAPITULO PRIMERO
LAS GENERALIZACIONES QUE CONDUCEN AL "CONJUNTO DE LAS PARTES"

con D. Voelin Liambey y I. Berthoud-Papandropoulou.

El conjunto de las partes es una clasificación entre todas las clasificaciones posibles de un conjunto o de una clase de elementos y, como tal, resulta de una forma característica de generalización constructiva: aquella en que una operación se eleva a la segunda potencia. Entonces, a veces formulamos la hipótesis según la cual la estructura del conjunto de las partes era preparada por la de las operaciones de "suplencia" (A1' A'1 A2 A'2 B) que permiten pasar de una clasificación o de una división a otra, conservando la misma totalidad. Eso no se replantea pero, ya que la suplencia se adquiere en los principios de las operaciones concretas (7-8 años e incluso mucho antes para los casos intuitivamente evidentes), mientras que la combinación y el conjunto de las partes sólo son accesibles a partir de los 11-12 años (y aún...), deben intervenir dificultades sistemáticas entre las dos y esas son las que estudiaremos aquí. Por tanto, la meta de esta investigación no es analizar la construcción de la estructura final del "simplejo" 2_{nt}, sino estudiar los procesos que parten de suplencias, por consiguiente de dobles divisiones, y se orientan hacia el conjunto de las partes.

Pues, para pasar de la suplencia al conjunto de las partes, se deben cumplir por lo menos dos condiciones que corresponden a grandes dificultades para el sujeto. La primera reside en el hecho de que, si la suplencia es la operación que sustituye la división A2 A'2 a A1 A'1, conservando el todo B constante, es necesario para llegar al simplejo no limitarse a esta sustitución o a la identificación de las totalidades, sino considerar las dos divisiones simultáneamente, para poder comparar las partes de una con las de la otra. En el caso de 4 clases, A y B y sus complementos no-A y no-B, eso equivale incluso a construir 16 combinaciones para un simplejo total. Pero el primer problema que tendremos que tratar, es establecer si para sólo dos divisiones dicotómicas, los jóvenes sujetos capaces de suplencia logran reflexionar acerca de ellas simultáneamente, es decir integrarlas ya en un sistema de conjunto que pueda analizarse en el detalle de las relaciones

posibles. Posteriormente, observaremos que éste no es el caso.

En segundo lugar, es evidente que la comparación entre divisiones implica la utilización de intersecciones. Así por ejemplo, en el caso de las 16 "partes" del conjunto cuyos elementos son A, B, no-A, no-B, cada uno de esos elementos se vuelve a encontrar en 12 "partes" y, al hacer la suma de sus utilizaciones respectivas, encontramos 16 para cada uno (o 1 o 2, según las "partes"). Pero entender una intersección entre dos clases o dos "partes", equivale a admitir que el elemento común pertenece a las dos al mismo tiempo, lo que supone de nuevo una comparación simultánea entre dos sistemas o subsistemas distintos (por ejemplo, una doble inclusión). También se planteará el problema de saber si se trata de una conducta fácil o si incluye cierto nivel de generalización constructiva. Pero ya se sabe que la tendencia de los jóvenes sujetos es sólo razonar sobre clases disyuntivas, y que los "agrupamientos" adicionales parten de tal estructura. En cuanto a los agrupamientos multiplicacionales que utilizan e incluso generalizan las intersecciones, el niño sólo las concibe de una manera comprensiva, en un primer momento. Por ejemplo, los elementos de cada casilla de una tabla con doble entrada son considerados simplemente como portadores de dos cualidades a la vez, y las casillas en sí son vistas como disyuntivas. Por tanto el problema sigue siendo igual en cuanto al paso, en realidad difícil, de la manipulación de las clases disyuntivas a la de las intersecciones extensivas[2].

Para reducir los dos problemas a sus formas más elementales, utilizamos suplencias realmente muy obvias, es decir figuras que se pueden inmediatamente clasificar entre cuadrados (A1) y entre círculos (A'1), o bien, entre grandes (A2) y pequeños (A'2). Por supuesto, las clases A2 y A'2 están compuestas por los mismos elementos de A1 y de A'1. Uno de los problemas estudiados es elegir, con toda libertad, las figuras (sin que importe el número), pero de manera que se obtenga "un número igual de cuadrados (A1) y de grandes (A2)".

Vemos que, por más elemental que parezca la tarea, eso supone sin embargo la utilización simultánea de dos divisiones. Además, entre todas las respuestas correctas posibles (y se trata de obtenerlas todas), interviene naturalmente la intersección. Si llamamos al, a1, a'1, a2 y a'2 las cualidades (predicados) de las clases anteriores A1, A'1, A2, A'2, las respuestas correctas podrán presentar las tres siguientes construcciones de clases X e Y·[3]

---

[2] Notemos que en una matriz multiplicativa, las relaciones entre cada una de las casillas y la totalidad, o sea, la relación de inclusión, pueden ser comprendidas extensivamente, mientras que la intersección entre casillas sigue perteneciendo al nivel de la comprensión.

[3] El símbolo n designa el número de elementos, X, los cuadrados, e Y los grandes.

1) nX (a la 2): en ese caso, habrá identidad X = Y, por tanto igualdad entre grandes y cuadrados.
2) nX (a1 a'2) = nY (a2 a'1): éste será la disyunción exclusiva.
3) nX (a1 a'2) + nY (a2 a'1) + nZ (a1 a2), de allí la igualdad X + Z = Y + Z, si Z es la intersección de las clases totales XZ (a1 a'2 + a1 a2) y YZ (a2 a'1 + a2 a1).

Pero si de esta manera nuestros problemas se centran en la simultaneidad de las divisiones y de las inclusiones (intersecciones), ¿cuáles son sus relaciones con la generalización? En un primer lugar, es claro que, aun sin llegar al conjunto de las partes, los razonamientos pedidos a los sujetos suponen la construcción de operaciones sobre operaciones, por tanto de formas a partir de formas. Pero podría creerse que este problema ya está resuelto en los principios del nivel operatorio 7-8 años mediante la elaboración de tablas con doble entrada o clasificaciones multiplicativas ya que: a) éstas suponen ya la consideración simultánea de dos divisiones y b) que cada una de las casillas de esa tabla representa en sí una intersección. Pues, las cuatro clases anteriores, A1, A'1, A2, A'2, constituyen esa tabla [4] y las tres soluciones indicadas (bajo 1-3) equivalen simplemente a utilizar una, dos o tres de las casillas de dicha tabla (asimismo, las 16 combinaciones 2n equivalen a agruparlas de todas las maneras posibles). ¿Cuál es entonces la diferencia entre los problemas que planteamos? A primera vista, reunir entre ellas y de diversas maneras las casillas de la tabla para construir subsistemas dentro del sistema total. Allí podemos ver una generalización (con diferenciaciones e integraciones) de las operaciones mismas que engendraron este sistema de conjunto. Pero, en realidad, estas reuniones parciales plantean una serie de nuevos problemas por las dos razones siguientes.

La primera es que, al considerar solamente las cuatro casillas, una por una, su significado es simple y equivale, como ya lo dijimos, a relacionar de manera comprensiva dos predicados (cuadrado grande, cuadrado pequeño, etc.), mientras que al relacionar 2 ó 3 casillas, la significación de las relaciones extensivas es compleja y requiere una generalización de parejas de predicados, conforme a nuevas relaciones: incluso independientemente de los números (que facilitan las comparaciones sin contener en sí dificultades), comparar los "cuadrados" con los "grandes" implica una relación entre una pareja de casillas y otra pareja, lo que conlleva a otro significado que sólo consiste en caracterizar y acomodar las cuatro casillas elementales sin preocuparse por sus posibles reuniones de dos o tres.

---

[4] De forma A1 A2; A1 A'2; A'1 A2; y A'1 A'2.

En segundo lugar, estos subsistemas de dos o tres casillas requieren una coordinación simultánea de un mayor número de negaciones que la construcción del sistema total: comparar los "cuadrados" con los "grandes" exige la exclusión de los no-cuadrados por un lado, y de los no-grandes por otro, casilla por casilla y siempre conjuntamente, mientras que en el sistema total, las negaciones siguen siendo globales e incluso pueden limitarse a simples "diferencias" (cuadrado y círculo, etc.).

En resumen, el "conjunto de las partes" hacia el cual nuestras preguntas orientan a los sujetos, supone una construcción que engendra nuevas relaciones a partir de las correlaciones elementales definiendo las cuatro casillas iniciales. Sin duda, se trata aquí de un problema de generalización.

La técnica incluye varias etapas y el material permite tres divisiones (y no dos como en el ejemplo simplificado mencionado anteriormente): cuadrados y círculos, grandes o pequeños y, rojos o verdes (8 clases de n elementos en cada una). Una vez explorado el material, se le dice al niño "puedes escoger las figuras como quieras pero quisiera que hubiera tantos (o "mucho de la misma cosa") cuadrados como grandes". Una vez obtenida la respuesta, se le pregunta al sujeto las demás soluciones posibles con respecto al mismo problema. Como lo acabamos de ver, pueden resultar de hecho identidades (grandes y cuadrados a la vez), disyunciones exclusivas o disyunciones no exclusivas, y de allí intersecciones. Para facilitar las cosas en caso de fracaso, o para mejor analizar el paso de una solución a otra, podemos plantear una segunda pregunta en una situación que sugiera inmediatamente la respuesta: habiéndose planteado 4 grandes cuadrados rojos y un gran círculo verde se le pide encontrar un número igual de círculos y de rojos. Ya obtenida esta solución, se prosigue: "¿se puede añadir otro círculo rojo sin destruir la igualdad?", o, "¿se pueden reemplazar los grandes círculos verdes por otra cosa (por pequeños)?". Etc. En una segunda parte del examen, se le presenta al sujeto un gran cuadrado verde y se le pide encontrar una figura que sea su "contrario". Una vez dada la respuesta, se le pide enseñar otros "contrarios" y por fin, se le pregunta cuál es "el más contrario", y si existe una gradación entre los contrarios. Se trata entonces de una enumeración de las diferencias (una, dos o tres con respecto a la figura-patrón), y de allí surge una serie de posibles preguntas: construcción de subclases, según el número de diferencias, indicaciones sobre su extensión, y "¿por qué sólo hay una figura que sea el contrario?", (en caso de que el sujeto haya enseñado el pequeño círculo rojo). También se le pide enseñar todos los elementos que no son "grandes cuadrados verdes", o sea lo complementario o negación en oposición

con la reciprocidad implicada por el término "contrario".

Es preciso aclarar que este término "contrario" (o "el más contrario") corresponde a respuestas de niños que empleaban espontáneamente esta expresión. En cuanto al número de diferencias con respecto al gran cuadrado verde, recordemos que sólo hay una en los casos del pequeño cuadrado verde, del gran círculo verde o del gran cuadrado rojo; que existen dos en los casos del pequeño cuadrado rojo, del pequeño círculo verde y del gran círculo rojo. El pequeño círculo rojo incluye tres diferencias. Finalmente, es importante precisar con cuidado la manera en que el niño utiliza o entiende los términos "y" y "o", ("grande y verde" y "grande o verde").

§/1- EL NIVEL IA.Entre los sujetos más primitivos, sólo hay comparaciones posibles entre clases ofreciendo propiedades similares:

ELA (5;8) describe correctamente 4 de las 8 clases presentadas: "*círculos, cuadrados y también grandes círculos y grandes cuadrados, pequeños círculos y pequeños cuadrados*", o sea cuatro de las ocho divisiones: "y, ¿qué más? -*Ya lo dije todo*". Un número igual de grandes y de cuadrados: sólo da "*grandes círculos y pequeños círculos*", y fracasa ante todas las preguntas similares. En cambio: "lo mismo de círculos rojos que de círculos verdes" conduce a dos grupos adecuados pero no cuantificados. Para el "contrario" de un gran cuadrado verde, da un pequeño cuadrado verde, luego un gran cuadrado rojo y luego un pequeño círculo verde: "*tomé el gran círculo verde porque los dos son verdes* -¿cuál es el más diferente?- (Enseña el pequeño cuadrado verde)".

Con los sujetos siguientes empiezan las comparaciones entre clases no similares:

MUR (5;11) enumera (en dos tiempos) las 8 clases: "quisiera que sacaras las figuras necesarias para que todos los grandes sean verdes -(Presenta 6 grandes cuadrados verdes)- ¿y otra cosa? -(Añade grandes círculos verdes)- ¿y si añado eso (pequeño círculo rojo)? -*No, porque es rojo: eso ya no haría un montón verde y grande*". No se ha logrado la inclusión: para 8 figuras entre las cuales 5 cuadrados: "*hay más cuadrados que figuras*". Tantos cuadrados como grandes: pone 6 grandes cuadrados como si le hubieran pedido sólo grandes cuadrados. "¿Hay un número igual de grandes y de cuadrados? -(Añade 6 pequeños cuadrados). *Sí,* (así), *hay lo mismo de grandes y de cuadrados: seis y seis.* -y así (4 grandes cuadrados verdes) ¿se puede decir que hay igual de grandes y de cuadrados?- *hay más cuadrados...* (no), *sólo hay grandes*). - ¿pero igual de cuadrados? - *No, sólo hay grandes*". Lo mismo con rojos y círculos: da 4 círculos verdes contra los 4 cuadrados rojos (disyunción correcta [5]). "Y si añadimos un pequeño círculo rojo - *Bueno, entonces 5 rojos* - ¿e igual de círculos? - *No, entonces ya hay* 4 (no entiende la intersección)".

PHI (5;6). Tantos cuadrados como grandes figuras: pone 4 grandes cuadrados (2 rojos y 2 verdes): "*es la misma cosa, no hay que tomar 3 o 4*" (de cada uno de los colores). Pone 4 grandes cuadrados verdes y 4 grandes cuadrados rojos y hace la cuenta. "*Sí,*

[5] Recordemos que en este caso, el éxito se debe casi exclusivamente al dispositivo presentado.

ya saqué la cuenta". Inclusión fracasada: "¿misma cosa de rojos y de círculos?" - *4 cuadrados rojos y 4 círculos verdes* (los 8 grandes). - ¿y de otra manera? - (Reemplaza 3 de los grandes círculos verdes por 3 pequeños). *No, eso no, es más pequeño.* -¿y eso molesta?- *Ah, no* (pero también cambia el cuarto). -¿y con eso (gran círculo rojo en vez de un cuadrado)?- *Sí* (pone 3), *salvo que eso* (cuarto cuadrado) *es verde*". Llega entonces a la solución de 4 cuadrados rojos y 4 círculos para igualar los rojos y los círculos: "*Pusimos el mismo color que todos los rojos... Sí, está bien* -Pero... ¿todos rojos y sólo 4 círculos?- (Reemplaza los cuatro círculos por 4 cuadrados verdes)".

DOM (6;8) enseña bien las 8 clases, así como "*todos*" los pequeños, etc. Pero a la pregunta: "¿Qué es cuadrado o rojo?", toma un cuadrado rojo. "¿Qué fue lo que pregunté? *algo cuadrado y rojo*". Asimismo sólo enseña un círculo verde para "algo redondo o verde". "¿Y eso (círculo rojo) dónde puede ir? -*No, ah, sí*- ¿por qué? -*No eso no está bien. Dijimos verde*- Y, ¿redondo o cuadrado? - (Enseña un cuadrado verde) *porque es cuadrado, o redondo o verde*", luego toma cuadrados y círculos: "*esos son cuadrados-redondos... Se pueden llamar cuadrados-redondos*". Igual cantidad de cuadrados y de grandes: enseña 6 grandes cuadrados verdes, luego corrige y pone 6 grandes y 6 pequeños cuadrados: "Mira, a una muñeca (la dibujamos), le gustan los cuadrados y a aquella los grandes. -*Ah, son todos los grandes cuadrados*- ¿hay mucho de la misma cosa? -*Hay más cuadrados*- ¿más que qué? -*Y más grandes*- ¿Y de otra manera? -*círculos grandes*)". Para que haya un número igual de rojos y de círculos, ponlos bien (después de vacilaciones) "*4 cuadrados* (rojos) y *4 círculos* (verdes). -¿Hay lo mismo de círculos y de rojos?- *No*".

Si llamamos división "homogénea", una división efectuada según un único y mismo criterio (forma, volumen o color), se pueden caracterizar las reacciones anteriores diciendo que esos sujetos todavía no saben razonar extensivamente sobre divisiones heterogéneas y que, para poder contestar, o las reemplazan por divisiones homogéneas, o bien, suprimen momentáneamente cualquier división fusionando, por vía comprensiva acerca de los objetos mismos, las cualidades que deberían permitir distinguir las dos clases. Además, y como consecuencia, estos sujetos sólo pueden razonar acerca de clases, o disyuntivas o fusionadas, ya que toda intersección les es ajena.

Con respecto primero a las divisiones homogéneas sustituidas a las heterogéneas, lo que equivale a construir falsas disyunciones exclusivas (falsas en cuanto a su contenido), vemos por ejemplo a ELA reemplazar la división "grandes y cuadrados" por "grandes y pequeños", despreocupándose totalmente por los cuadrados. De la misma manera y en un momento dado, el sujeto MUR opone grandes con pequeños cuadrados. Asimismo, DOM y PHI introducen la dicotomía inadecuada entre los rojos y verdes.

En segundo lugar, se puede notar la manera en que MUR interpreta: "tantos cuadrados como grandes" en el sentido de "los grandes cuadrados", o como DOM descodifica "cuadrado *O* rojo" en "cuadrado *Y* rojo", etc... Esta fusión podría parecer lo contrario de una división homogénea, pero se debe a la misma causa: ya que no pueden com-

parar de una manera extensiva las clases "cuadrados" y "grandes" o "rojos" que corresponden a divisiones heterogéneas, las fusionan de un modo comprensivo, cosa que les resulta fácil ya que un mismo objeto puede tener varias cualidades distintas. Cuando se intenta traducir esta fusión en una identidad extensiva (ver las clases X e Y en la introducción), nos enfrentamos con una resistencia total: MUR, para 4 grandes cuadrados (sin ninguna otra cosa), se niega a admitir que hay allí tantos (extensión) cuadrados como grandes: "hay más cuadrados... no sólo hay grandes". Recíprocamente, DOM que reunió correctamente cuadrados y círculos para contestar a "círculos o cuadrados", los llama "cuadrados" - redondos", sirviéndose de un lenguaje que sustituye una comprensión (hasta contradictoria) a la extensión sin embargo fácil (división homogénea según la forma), de manera a reemplazar el "o" por un "y".

Es obvio que en esas condiciones, no podría haber comprensión de la intersección: para un número igual de círculos y de rojos, MUR da (según le sugiere el dispositivo) 4 círculos verdes y 4 cuadrados rojos, pero rechaza un círculo rojo sin ver que es a la vez redondo y rojo, y por consiguiente no destruye la igualdad. El hecho de que cada uno de esos sujetos fracase en cuanto a las preguntas de inclusión (más elementos en la totalidad que en la parte), vuelve natural esa imposibilidad de intersección. En fin, en las preguntas del "contrario", los sujetos sólo indican una diferencia a la vez, sin jerarquía (cf. ELA) y sólo la describen en términos positivos e incluso, en algunos casos, relacionándola con semejanzas: "tomé el gran círculo verde (para oponerlo al gran cuadrado verde) porque los dos son verdes". Está claro que esa dificultad para manejar las negaciones desempeña cierto papel en la incapacidad inicial para construir divisiones heterogéneas ya que incluyen dos negaciones.

§/2 -EL NIVEL IB- Aquí están los hechos:

DID (6;4) empieza como en IA (para n cuadrados = n grandes) proponiendo 4 grandes de los cuales 2 cuadrados. "¿Qué fue lo que pedí? -*Aparte de un cuadrado todos deben ser grandes* -No (se repite)- *Entonces es difícil* (reemplaza los 2 círculos por grandes cuadrados) -*Aquí hay todos grandes y todos cuadrados* (identidad pero entre 2 verdes y 2 rojos)- Bien, ¿se puede hacer de otra manera? -(Pone 4 grandes círculos) *De todos modos, hace como los cuadrados* (tamaño) *pero es otra forma*- Yo quisiera que... etc. -(Pone 4 pequeños cuadrados)- ¿Y si pusiéramos 3 grandes cuadrados? -(Vacilación)- ¿y 4? -*Igual: son todos grandes y todos cuadrados*- ¿Y 3? -*Un poco igual*- El contrario (de un gran cuadrado verde) -*Aquí está* (gran círculo verde)- ¿Otro? -(pequeño cuadrado verde) *El contrario de la forma, no del tamaño*-. ¿Otra cosa más? -*Eso* (pequeño cuadrado rojo), *así es el contrario del color* (gran cuadrado rojo), *luego es el contrario del tamaño* (pero no los dos a la vez). Los enseña todos pero según una sola cualidad-. ¿Hay unos que son más contrarios? -*No* (enseña parejas)- ¿Pero más contrarios? -*Son*

todos los contrarios, los círculos (con relación al cuadrado inicial pero sin jerarquía). "Se presentan 4 cuadrados (2 pequeños rojos y 2 grandes verdes)". "¿Puedes sacar las figuras que son, o bien pequeñas, o bien cuadradas?- (Saca una de cada una) *Un pequeño cuadrado y uno grande*".

SAR (6;6). Tantos grandes como cuadrados: pone 15 grandes cuadrados rojos. "¿Qué fue lo que pedí?" - *Tantos círculos como cuadrados.* -No (etc.)- (Sigue oponiendo estos cuadrados con círculos) -Y así, (4 grandes cuadrados), ¿hay más cuadrados o más grandes, o igual?- *La misma cosa... Son todos grandes y todos cuadrados.* -Y, ¿para tener más cuadrados que grandes?- (Pone pequeños) -Bien, ¿y de otra manera para tener igual?- (Cambia las disposiciones espaciales) -¿Y añadiendo?- (Añade grandes cuadrados rojos) *Si no se dice el color se puede.* -Y, ¿si se añade eso (gran círculo verde), tendremos la misma cosa de grandes y de cuadrados?- *Sí, porque también es grande pero no es cuadrado.* -¿Entonces?- *Sí, es lo mismo... pero hay más cuadrados que círculos* (cf. el principio) -¿Pero más grandes o más cuadrados?- *Más grandes*". Para igualdad entre rojos y círculos [6], propone 4 grandes círculos verdes en contra de 4 grandes cuadrados rojos. "Y, ¿de otro modo? -*Poner los pequeños*". A cada uno de los dos montones de 4 se añade un gran círculo rojo: "¿Sigue siendo igual?- *Sí, porque allí* (los cuadrados rojos) *es rojo, no se toma en cuenta que es redondo y allí* (los círculos verdes) *es redondo, no se toma en cuenta que es rojo*". Pero no percibe el hecho de que equivale todavía a 6 rojos y a 6 círculos, porque no establece una correlación entre los dos grupos.

GON (6;9), para n rojos = n círculos, complementa naturalmente el dispositivo añadiendo 4 círculos verdes, pero traduce el resultado en términos de círculos y cuadrados. Se le propone reemplazar esos 3 círculos verdes por 3 rojos y está de acuerdo salvo que: "*allí* (parte por complementar) *no tienen el mismo color: hay que quitar el círculo verde y poner uno rojo.* -¿Y entonces se obtiene igual de rojos y de círculos?- *Sí, allí hay 4 círculos y allá 4 cuadrados.* -¿Dónde están los rojos?- (Enseña la totalidad) -Entonces, ¿más rojos o más círculos, o la misma cosa?- *La misma cosa*".

A pesar del progreso intelectual que caracteriza ese nivel, todavía los sujetos no logran construir divisiones heterogéneas, o sea relacionar simultáneamente dos divisiones homogéneas. Por ejemplo, BAR (el niño más dotado que vimos para esta edad) traduce la pregunta inicial "n cuadrados = n grandes" en "n cuadrados = n círculos", y sigue aferrado a esa idea hasta el final. GON transforma "n rojos = n círculos" en "n círculos = n cuadrados", sin lograr ni siquiera, hasta el final, una lectura correcta de los resultados (8 rojos igual que 4 círculos por indiferenciación de la extensión y de la comprensión).

En cuanto a las soluciones de identidad (grandes cuadrados por sí solos), frecuentes a ese nivel, ya no consisten, como en el nivel IA, en comprender que se pide simplemente todos "los grandes cuadrados", sin embargo no equivalen aún a identificar dos cosas con un mismo contenido: eso significa que, entre los cuadrados grandes, unos los consideran como grandes y otros como cuadrados; de allí los dos cuadrados verdes y los dos grandes rojos que DID separaba en dos sub-

[6] Recordemos que la técnica facilita aquí la solución.

grupos, y de allí también su vacilación para aceptar un número impar (3).

Por tanto no hay posibilidad de intersecciones intencionales y cuando las provocamos, los elementos comunes se reparten entre las dos clases de la disyunción. Un ejemplo obvio es el de BAR, para n círculos = n rojos: cuando se le propone añadir dos círculos rojos, no los coloca entre los 4 cuadrados rojos y los cuatro círculos verdes, a modo de intersección, sino que pone uno encima de los cuadrados rojos diciendo: "allí es rojo, no se toma en cuenta que es redondo", y pone el otro encima de los círculos verdes pretextando: "allí es redondo, no se toma en cuenta que es rojo".

Con respecto a los "contrarios", vemos a DID dando siempre una sola diferencia a la vez; aun cuando menciona dos sucesivamente (color y luego tamaño). No descubre que se puede establecer una jerarquía según el número de diferencias y no existe un "más contrario", salvo en el caso, de naturaleza sujetiva, en que el niño otorga una mayor importancia a un factor más que a otro, por ejemplo a la forma con respecto al tamaño: en ese caso, el gran círculo rojo será considerado como "más contrario" que el pequeño cuadrado verde. En cambio, aun cuando el sujeto propone como "contrarios", figuras conteniendo 2 ó 3 diferencias, responderá "la misma cosa" cuando se le pregunta por "los más contrarios".

Además, está claro que las reacciones frente a la pregunta sobre las diferencias tienen una gran relevancia para la construcción del conjunto de las partes: atestiguan acerca de la ausencia de una regulación y de una jerarquización de las negaciones, que impide, en realidad, la construcción de divisiones heterogéneas extensivas con los subsistemas que esas suponen. Por esta razón, todo el primer estadio, incluyendo el nivel IB, puede caracterizarse por la ausencia de soluciones espontáneas mediante disyunciones correctas, la ausencia de intersección y por identidades todavía mal comprendidas.

§/3 -EL NIVEL IIA- A continuación están unos ejemplos que empiezan por un caso centrado únicamente en el "o" y el "y", así como el "contrario" y el complemento (negación).

CAT (7;4) a quien se le pide tomar las figuras redondas o cuadradas, las enseña todas, "pero sólo te dije 'cuadrado o redondo' - *Pero todos son o cuadrados o bien círculos* - Y si te pregunto ¿'grandes o pequeños'? - *Cualquiera: todos son o grandes o pequeños*". En cambio, para "o grandes o verdes" (dos categorías), sólo enseña los grandes rojos: "*Eso es todo* -¿Por qué no otros?- *Porque los demás son verdes y grandes* (reflexión). *Sí, porque también es grande y verde* - ¿Qué fue lo que te pedimos? -*Los grandes o bien los verdes* -¿Y eso (pequeños verdes)?- *Sí, porque son verdes* -¿Qué es imposible tomar? (Enseña los grandes verdes que antes había aceptado, pero después de cierta vacilación). *Porque son las dos cosas* (al mismo tiempo) -¿Y otras imposibles?- (Enseña los pequeños rojos). *De nuevo son las dos cosas, porque son pequeños y no verdes* (o sea ni

una cosa ni la otra) -¿El contrario de los grandes cuadrados verdes?- (Enseña el gran cuadrado rojo). *Porque es rojo: es el contrario de verde.* -¿Y otros?- (Pequeño cuadrado verde) *Porque es el contrario de grande.* -¿Y otros?- *No, es todo* (luego toma el pequeño cuadrado rojo), *porque es el contrario del tamaño y del color* (y el pequeño círculo rojo) *porque no es grande, ni cuadrado, ni verde.* -¿Entonces todas las figuras son contrarios?- *Sí* -¿Y cuál es más?- *Esa* (pequeño círculo rojo) *porque es pequeño, no verde y no cuadrado.* -Y entre el gran cuadrado rojo y el pequeño cuadrado verde, ¿cuál es el más diferente del gran cuadrado verde?-*Es la misma cosa-: cada uno una diferencia*". En cambio, cuando se le pide clasificar los 6 elementos incluidos entre el gran cuadrado verde y el pequeño círculo rojo, CAT no logra construir las subclases adecuadas y mezcla elementos con una o dos diferencias. "Me puedes enseñar las figuras que no son 'pequeños cuadrados'?". Enseña las 6 otras, pero no puede definir la distinción entre el contrario y la negación.

A pesar de las reacciones relativamente correctas a los problemas de clasificaciones (en particular la pregunta habitual de inclusión siempre está bien contestada) y de diferencias, los sujetos del nivel IIA, como en IB, siguen recurriendo primero a falsas disyunciones (una sola división) para luego corregirse:

EMA (7;4) para los grandes y los cuadrados, opone 4 grandes con 4 pequeños pero escoge 2 cuadrados y 2 círculos para cada uno: sin embargo, no se da cuenta que la solución corresponde a lo pedido que repite bajo la forma: "tantos grandes como pequeños". Se le vuelve a dar la información y redistribuye el mismo grupo entre cuadrados y círculos sin ver todavía la igualdad ya lograda entre grandes y cuadrados; luego quita los grandes círculos, "porque no son cuadrados". Toma 4 cuadrados, obteniendo de nuevo la oposición entre pequeños y grandes; luego estima que es falso porque "todos son cuadrados" cuando "le habían pedido grandes y luego cuadrados". Eso no le impide volver a empezar con 4 grandes cuadrados, tomar un círculo que luego descarta, y oponerles de nuevo 4 pequeños cuadrados: "*Ah, no, creo que entendí: habría que reemplazarlos* (grandes cuadrados) *por círculos grandes*". De allí por fin la primera solución justa que corresponde a una disyunción adecuada: 4 grandes círculos y 4 pequeños cuadrados. Al pedirle otras soluciones, reemplaza 2 grandes círculos por 2 grandes cuadrados y luego constata que eso es falso y deja 2 grandes círculos y 2 pequeños cuadrados, reconociendo que "*es la misma solución que la primera. Trato de encontrar otra* (pone 4 grandes cuadrados). *Aquí está: son cuadrados y son grandes* (identidad). ¿Está bien? -*Sí... Allí* (1a línea) *son 2 cuadrados y allá* (2a línea) *también. Allí* (1a línea) *son grandes y allá* (2a línea) *son cuadrados* (entonces fracasa en cuanto a la intersección a favor de una disyunción artificial)... *Voy a cambiar porque considero que es falso*". Vuelve entonces a 2 pequeños cuadrados, luego los quita y coloca 2 grandes, "*pero no estoy muy de acuerdo aún, pero debe estar bien*". Acaba por confirmárselo diciendo que "*allí* (1a línea) *son cuadrados y allá* (2a línea) *son grandes*", pero ya no logra entender que con 4 grandes cuadrados la solución es justa mientras que con 2 grandes y 2 pequeños, ya no lo es. La prueba de esa dificultad para concebir la identidad cuando hace falta una forma de intersección, es que acepta un gran círculo verde y un pequeño cuadrado rojo, "*hay 1* (grande) *y 1* (cuadrado)", pero reconoce por sí misma: "*si se añadiera un gran cuadrado rojo* (lo que precisamente constituiría una intersección correcta), *eso sería falso*". Por tanto, en cuanto al contrario y a las diferencias, reacciona como CAT.

SEN (7;10) repite bien lo que se le pide, tantos "*grandes como cuadrados*" pero sólo toma grandes cuadrados y círculos para obtener "*tantos grandes cuadrados rojos y*

verdes como grandes círculos rojos y verdes". Sólo llega a la igualdad deseada con mucho trabajo.

OLE (7;50) empieza en cambio con 4 grandes cuadrados pero justifica primero la igualdad n grandes = n cuadrados diciendo: "*se ve, son grandes, son rojos.* -¿y n grandes = n cuadrados?- *porque puse grandes*". Pero esta comprensión es tan frágil que, para otra solución, añade 4 pequeños cuadrados verdes; luego admite que se deben quitar y vuelve a la identidad con 4 grandes cuadrados verdes sin poder encontrar otra combinación. Para los n rojos = n círculos; complementa naturalmente el dispositivo con 3 círculos verdes, pero encuentra (lo que constituye un progreso) que se pueden añadir 2 círculos rojos y 2 cuadrados verdes sin destruir la igualdad (6 círculos y 6 rojos). Pero antes de definirla, vuelve a caer en la descripción con una sola división: "*hay 6 círculos y 6 cuadrados*". Las inclusiones, los "o" e "y", así como los contrarios son del nivel de CAT.

AND (8;3) empieza por una falsa disyunción: 4 grandes cuadrados por "los cuadrados" y 4 grandes círculos por "los grandes"; luego se da cuenta de su error y quita los grandes círculos: en ese caso, "*habrá 4 grandes y luego al mismo tiempo son cuadrados*". Eso parece ser una comprensión completa, pero se llega a preguntar si se pueden añadir 4 pequeños cuadrados y necesita hacerlo para darse cuenta que 8 cuadrados » 4 grandes. Tampoco logra contestar la primera vez la pregunta fácil de n círculos = n rojos, pero logra obtener posteriormente y con cierta vacilación, hasta 8 círculos = 8 rojos, entre los cuales 4 rojos y círculos (intersección no deseada como tal). Mismo logro con vacilación para 12 = 12.

BUR (8;4) se propone, para los cuadrados y los grandes, colocar los cuadrados en dos líneas "*y los grandes en medio*", pero eso no es una intersección. Lograr reunir un pequeño cuadrado y dos grandes, luego un gran círculo y dos grandes cuadrados, llamando al primer trío " los cuadrados", y al segundo "los grandes". Pero, a pesar de que la solución sea correcta, le molesta el que "*los grandes cuadrados también son cuadrados*", y los reemplaza por unos pequeños. Dándose cuenta de su error, da el paso hacia una simple disyunción: 3 grandes círculos y 3 pequeños cuadrados. Por otra parte, se niega a añadir un pequeño círculo rojo "*porque no es grande ni es cuadrado... eso no cambia* (n grandes = n cuadrados), *pero solamente no se puede añadirlo*". En cambio, acepta un gran cuadrado verde "*porque es grande y cuadrado*", pero toma 2 de esas figuras para respetar la forma disyuntiva. Asimismo, para n rojos = n círculos, BUR, después de haber logrado buenas disyunciones, se niega a añadir un cuadrado verde ya que no es rojo, ni redondo, pero después de una enumeración admite "*que no cuenta, eso no cambia nada*". Sin embargo, un círculo rojo de más le parece implicar "*más rojos porque este círculo es rojo*", sin ver que de hecho eso implica también más círculos.

· Este nivel del principio de las operaciones concretas no corresponde al paso decisivo que hubiéramos podido esperar en cuanto à la construcción de las divisiones heterogéneas. Como progreso, sólo se observa el logro final de las soluciones mediante disyunciones correctas pero después de muchas vacilaciones y a partir de falsas oposiciones. Se percibe una mejor comprensión de las soluciones de identidad, pero esa sigue siendo incompleta e insuficiente para desembocar en las intersecciones.

En lo que se refiere a las soluciones de disyunción exclusiva, vemos

a EMA seguir partiendo de la oposición entre grandes y pequeños (sin una lectura suficiente del resultado obtenido al azar y que la llevaría a ver que correspondía a la pregunta 1), y sólo logra n grandes = n cuadrados después de numerosas vacilaciones. En cuanto a SEN, parte de la división entre círculos y cuadrados y AND procede de la misma manera.

En cuanto a las identidades, el sujeto se aproxima a la idea de dos clases incluyendo el mismo contenido pero con la necesidad de considerarlas todavía como si fueran disyuntivas: EMA dice bien que "son cuadrados (4) y luego son grandes", pero precisa que 2 de ellos "son grandes" y los 2 más "son cuadrados", como si se olvidara que todos son una cosa y otra. OLE y AND vacilan a pesar de la buena fórmula de este último: "hay 4 grandes y al mismo tiempo son cuadrados".

Por tanto no se realiza la intersección, salvo cuando es involuntaria (AND) y EMA llega a decir "eso sería falso"; por su lado BUR, en un círculo rojo, sólo ve la segunda cualidad hasta sostener esta afirmación contradictoria: eso daría "más rojos (que círculos) porque este círculo es rojo". En cuanto a las adiciones de elementos que se proponen conservando la igualdad deseada, algunas se aceptan, pero por lo general, son rechazadas: "eso no cuenta, dice BUR, pero solamente no se pueden añadir", porque eso rompe el equilibrio de las dicotomías.

Con respecto a las diferencias y a los "contrarios" (CAT), se notan con exactitud y de un modo comprensivo, pero aún no se dan de un modo extensivo ya que la tabla de los subsistemas corresponde a las divisiones heterogéneas.

§ /4 -EL NIVEL IIB- A esas edades de $8^1/^2$ a 9 años, es algo sorprendente volver a encontrar los mismos errores iniciales que aparecían anteriormente, pero se llega más rápido a disyunciones correctas y sobre todo -en eso consiste la novedad-, a intersecciones explícitamente justificadas.

ERI (8;3) empieza por 6 grandes círculos y 6 cuadrados de los cuales 3 grandes, lo que equivale a 9 = 6: "Enseña los cuadrados - (Lo hace) - Y los grandes - *Hay el grupo* (6 círculos) *y luego los 3* (grandes cuadrados). *Deberíamos ponerlos en medio* (sentimiento implícito de intersección) -¿Entonces?- *Hay más grandes que cuadrados* -¿Qué hacer?- *Quitar esos* (3 grandes cuadrados) *y poner 3 pequeños cuadrados porque eso* (grandes cuadrados) *formaba parte de los grandes y de los cuadrados*". Así, logra una disyunción correcta, 6 = 6, y, para otra solución, propone una semejante, 9 = 9. "¿Y una solución diferente?- *Sí*, (4 pequeños cuadrados, 2 grandes y 4 grandes círculos, de allí 6 grandes = 6 cuadrados) *porque los 4 pequeños cuadrados con los 2 grandes son 6 cuadrados, y también tenemos 6 grandes porque esos* (2 grandes cuadrados) *también son grandes*". La intersección se vuelve explícita: "*allí* (solución I de disyunción) *está separado, mientras que allí hay 2 que pueden ir en los dos conjuntos*". Otra solución: 3

pequeños cuadrados, 1 grande y 3 grandes círculos: ¿eso es realmente una nueva solución?- *Hay menos* -¿Y otra muy sencilla?- *Un pequeño cuadrado, un gran círculo y un gran cuadrado... Es la misma cosa pero los números son diferentes.* -¿Y con un sólo tipo de figuras?- ... "No encuentra la identidad, pero después de una pregunta, está de acuerdo con que a una de esas soluciones se puede añadir un gran cuadrado. "¿Y todo el montón? -*Tenemos igual porque pueden ir entre los grandes y entre los cuadrados.* -¿y un millón?- *Es lo mismo* -¿Y si relacionamos 2 soluciones siempre habrá tantos cuadrados como grandes?- *Sí,* (lo hace)".

HEN (8;9) todavía propone falsas disyunciones tales como 2 pequeños cuadrados y 2 grandes (de allí 4 » 2), pero rápidamente logra obtener 2 gandes círculos y 2 pequeños cuadrados y, sobre todo, añade luego 2 grandes cuadrados "porque son cuadrados y al mismo tiempo grandes". Pero vuelve a caer en las falsas disyunciones hasta 10 cuadrados entre los cuales 6 grandes (¡) desviando el problema hacia la oposición verdes-rojos (4 grandes y pequeños de cada color) y poniendo en medio 2 grandes rojos por ser a la vez "grandes, rojos y cuadrados". Por sí sólo no piensa en la identidad pero cuando se le pregunta si la solución sería posible con "un solo montón", contesta: "Esos (grandes cuadrados rojos) porque son grandes y cuadrados". Para n rojos = n círculos, pasa por todas las soluciones correctas hasta 8 cuadrados rojos, 8 círculos verdes y en medio de esos, 8 círculos rojos que "son al mismo tiempo con esos porque son rojos y allí porque son redondos".

LAU (9;0), para n grandes = n cuadrados, empieza por la falsa disyunción: grandes círculos y grandes cuadrados y luego reemplaza los últimos por pequeños. De entrada, acepta un pequeño cuadrado, un gran círculo y un gran cuadrado porque este último "puede ir en las dos partes, allí porque es cuadrado y allá porque es grande". Para variar las soluciones, sólo encuentra cambios de color, por generalizaciones simplemente extensivas, luego, cuando se le propone 3 grandes cuadrados, añade 1 para lograr la disyunción 2 contra 2, pero se da cuenta de que valen a la vez para los grandes y los cuadrados.

BOR (9;1) empieza por lo que cree ser una disyunción (dos grandes cuadrados frente a otros dos) pero descubre la identidad: "*No es otra cosa sino cuadrados... Y todos son grandes*". Pero si bien explota esta solución para diversas variaciones de colores, (2 verdes, 2 rojos en distintas posiciones), vuelve a caer posteriormente en falsas disyunciones. Para el "contrario" de un gran cuadrado verde, enseña sin vacilación el pequeño círculo rojo, justificando las tres diferencias. Además, y a diferencia de los sujetos del nivel IIA (cf. CAT) que sólo razonan a base de comprensiones, BOR precisa las extensiones: tres figuras con una diferencia (en un primer momento dice dos y luego menciona la tercera) y tres con dos diferencias (las enseña inmediatamente). En cuanto a este pequeño círculo con tres diferencias, se queda solo porque "*está menos cercano al cuadrado*".

Por fin, estas reacciones preparan claramente el "conjunto de las partes". Las divisiones heterogéneas pedidas conducen rápidamente a disyunciones correctas; se entienden las identidades por lo que son ("son grandes y cuadrados" dice HEN, sin dicotomía entre subconjuntos), y sobre todo se logran las intersecciones espontánea y frecuentemente. De allí la inutilidad y la poca frecuencia de las soluciones espontáneas de identidades. Por fin, el sujeto deduce, antes de averiguarlo, que dos soluciones justas distintas pueden ser reunidas con-

servando la igualdad n = n, y empieza a traducir de manera extentiva las relaciones "diferente" y "contrario". Por tanto, bastará una disminución de las vacilaciones para alcanzar con éxito las soluciones rápidas del estadio III.

§/5 -EL ESTADIO III- He aquí primero, un ejemplo de reacción intermedia entre los niveles IIB y III:

PAT (10;0) aún empieza por una falsa disyunción (grandes y pequeños cuadrados) pero la corrige rápidamente con 2 grandes círculos en vez de los grandes cuadrados. "*Lo que me molesta son esos dos* (los grandes cuadrados que había colocado inicialmente): *son grandes y cuadrados* -¿Eso no podría ser?- *Hay que ponerlos en medio* (intersección) -¿Valen igualmente las dos soluciones?- *Esa* (la intersección) *es mejor porque se pueden poner esos dos.* -¿Cuál es la diferencia entre las dos soluciones?- *Eso* (disyunción) *es grande O cuadrado y eso* (intersección) *es grande Y cuadrado* -¿Existe otra solución?- *Ah, sí,* (dos grandes cuadrados): *es grande y cuadrado* -¿Y hay igualdad?- *Sí,... pues..., ya que son grandes y cuadrados*". Los contrarios: cf. BOR.

Por fin, un caso franco:

BLA (10;10), después de un malentendido acerca de la pregunta (pensaba en una equivalencia de superficies), encuentra inmediatamente dos buenas disyunciones (dos grandes círculos y dos pequeños cuadrados o lo inverso de los tamaños); luego, descubre que bastan dos grandes cuadrados; y añade: "*también se puede poner un solo gran cuadrado*". Si se añade un pequeño círculo rojo a ese único cuadrado: "*eso no vale... sí, creo que vale a pesar de todo*", etc. "También se pueden cambiar los colores, pero las soluciones siguen siendo las mismas". En cuanto a las negaciones y a los contrarios: "¿Puedes enseñarme todo lo que no es un gran cuadrado verde? -(Enumeración) (justa)- ¿Y el contrario? (de lo mismo)- (Enseña el pequeño cuadrado rojo) *Ah, no, lo justo es el pequeño círculo rojo porque es redondo* -¿Cuál es la diferencia entre 'el contrario' y 'algo que no es'?- *Le voy a explicar*". Para la negación enseña las 7 figuras (no gran cuadrado verde) mencionando las diferencias. En cuanto al contrario, "*sólo hay uno porque hay que proceder con exactitud: rojo, no es el color, pequeño, no es el tamaño, y círculo no es la forma*". Así da la definición de la reciprocidad (cada propiedad negada) con oposición a la complementaridad o negación del grupo INRC.

Vemos que, ya en ese nivel, el sujeto se vuelve capaz de acceder a la combinación origen del conjunto de partes y de allí podría sacar el grupo INRC, ya que distingue las inversiones y reciprocidades. Por otra parte, podemos considerar nuestros 8 elementos como constitutivos de una estructura de grupo con 8 operaciones, entre las cuales la identidad y 7 involuciones: cambio de forma F, de tamaño T, de color C, de FT a la vez, de FC, CT, y de FTC. Pero no se trata aqui de un grupo INRC, sino de uno de esos grupos de simple o doble cuaternidad que permiten pasar de una casilla a otra, dentro de una tabla multiplicativa con 4 u 8 elementos. En cambio, si nuestra tabla sólo tuviera 4 elementos, el conjunto de las 16 partes y la distinción de los inversos y recíprocos fácilmente darían lugar a inferencias conformes al grupo INRC.

§/6 -CONCLUSION- Partiendo de una clasificación adicional cualquiera, la suplencia consiste en cambiar de división. Al reunir esas dos (o n) divisiones se obtiene una tabla con doble (o n) entradas del tipo $\begin{pmatrix} 1.2 \\ 3.4 \end{pmatrix}$. El conjunto de las partes equivale a considerar, no sólo esas 4 partes, sino además todas las que resultan de sus combinaciones (1,2);(1,3);(1,4) etc..., o (1,2,3);(1,3,4), etc..., incluyendo 0;1 y las 4 a la vez (o sea 16 en total). Las preguntas que hicimos a los sujetos consistían sobre todo en hacer comparar dos partes como (1,2) y (1,3), pidiendo la igualdad del número de sus elementos, o sea: n (1+2) = n (1+3). Si realmente existe un proceder orientado hacia el conjunto de las partes, el problema reside ahora en entender a través de qué generalizaciones se efectúa esta construcción, ya que la dificultad principal, como siempre lo notamos, es razonar sobre dos divisiones a la vez, es decir sobre divisiones heterogéneas y no solamente sobre dicotomías.

Las soluciones encontradas por los sujetos para igualar n (1+2) con n (1+3) fueron de tres tipos: *la identidad* que consiste en sólo utilizar la subclase o división 1, dejando por un lado 2 y 3; *la disyunción exclusiva* n2 = n3, dejando la parte común 1; y, *la disyunción no exclusiva* con *intersección*: (1+2+3) o n (1+2) = n (1+3). Pero dichas soluciones no son presentadas según cualquier orden, y es, ante todo, su orden de construcción lo que nos informará del mecanismo de ésta.

1) Ese orden de sucesión se inicia con una fase muy reveladora, propia del nivel IA: tratándose de encontrar "tantos" "cuadrados" n (1+2) como "grandes" n (1+3), el sujeto descuida totalmente la extensión "tantos" (entonces n) y sólo conserva los significados en comprensión "cuadrado" y "grande". Por tanto se limita a reunir algunos "grandes cuadrados", lo que no presenta ninguna dificultad ya que en comprensión, a un objeto se le puede atribuir varias cualidades sin recurrir a divisiones ni a negaciones, mientras que en extensión, su delimitación supone divisiones forzosamente heterogéneas (por el hecho de que se invoca más de una sola cualidad), con las extensiones y las negaciones que incluyen.

La segunda fase (nivel IB) corresponde a las soluciones justas que todavía se limitan a identidades (parte I), sin lograr disyunciones (n2 = n3), pero con un principio de extensión aplicada a esta parte 1. Sin embargo se trata de una forma particular de extensión que aún no se refiere a la intersección (los que son "a la vez" grandes y cuadrados), pero que sigue dependiente de las clases disyuntas, propias de las divisiones dicotómicas homogéneas. Así, el sujeto escoge un número par de grandes cuadrados, por ejemplo 4, (y se puede notar que la preferencia por tal número par perdura bastante tiempo), de

los cuales considera la mitad como "cuadrados" y la otra mitad como "grandes". Aquí tenemos un principio de división heterogénea que sin embargo resulta fácil porque se aplica a los mismos elementos (los cuadrados y grandes) y no incluye ninguna negación explícita.

La fase tercera corresponde a una generalización de ese principio de división heterogénea en extensión, pero aplicada a nuevos elementos (además de 1) sean cuadrados o círculos. De manera general, se nota que eso supone mucho trabajo y vacilaciones por parte de los sujetos. Esta generalización implica una constitución de negaciones (diferentes o "contrarios") que aún se dan en comprensión, sin regulación inmediata de las extensiones. Pero si se llega de esta manera a la construcción final de las distinciones exclusivas, (n2 = n3), la identidad, a pesar de ser mejorada, sigue ligada a la necesidad de sólo razonar sobre clases disyuntas (como lo son las clases 2 y 3) y los grandes cuadrados de la clase 1 siguen apareciendo en números pares (por lo general 4 también), como si se tratara todavía de una mitad de "cuadrados" y otra de "grandes". De allí el fracaso de la intersección.

Finalmente en la cuarta fase aparece la generalización de la extensión que no sólo se aplica a las negaciones (clases con una, dos o tres diferencias) sino también a la identificación: los "grandes cuadrados "y" ya sólo forman dos clases con un mismo contenido, es decir clases idénticas en extensión a pesar de tener cualidades dobles en comprensión. Entonces se vuelve posible la disyunción no exclusiva con intersección (1+2+3), gracias a una síntesis generalizadora de la identidad (1) y de la disyunción (2+3) o sea, mediante generalización de la división heterogénea.

La quinta fase que aquí no estudiamos, corresponderá a la construcción combinatoria de todas las partes posibles. De allí el simplejo 2^n que se limita a reunir bajo todas las formas, las soluciones fundadas en las clases 1; 2+3; y, 1+2+3, con, por supuesto, la intervención de la clase 4.

II) En lo que se refiere ahora a los procesos de generalizaciones en sí, no cabe duda de que encontramos, en los hechos mencionados anteriormente, algunas generalizaciones inductivas, pero sobre todo una elaboración continua de generalizaciones constructivas. Las primeras se dan cuando el sujeto, después de haber encontrado una solución (falsa o correcta) la aplica sin más a nuevos contenidos (colores, etc.), ya presentes en los datos pero que antes no habían sido utilizados. En ese caso, no hay creación de nuevas formas, ni a *fortiori* construcción de nuevos contenidos, sino que se realiza una simple aplicación del esquema resolutorio anterior. En cambio, en el caso del paso progresivo entre las clases disyuntas propias a las divisiones homogéneas (o a los

agrupamientos adicionales) y las nuevas relaciones que exigen las divisiones heterogéneas o finalmente el conjunto de las partes, constantemente se da una generalización constructiva en el sentido de la producción de nuevas formas entre las cuales las de rango inferior son los contenidos de la de rango superior (1 clase en las reuniones de 2, reuniones de 2 en las de 3, etc.); de tal modo que se puede hablar de la creación simultánea de formas y de contenidos.

Antes de tratar de definir lo que conlleva a esta construcción desde el punto de vista de las diferenciaciones e integraciones, o desde el punto de vista de las relaciones entre la comprensión y la extensión, volvamos a los procesos que conducen al paso de cada una de nuestras 5 etapas a la siguiente.

Como ya lo vimos, la primera se caracteriza por simples significados elementales en comprensión: cuadrado y grande, o rojo y círculo. El problema reside en explicar el inicio de la aplicación extensiva propia de la segunda etapa. Pero, la elección de "grandes cuadrados" propia de la identidad que caracteriza la primera, supone ya dos divisiones implícitas que consisten en oponer los cuadrados con los círculos y los grandes con los pequeños, conduciendo, en ambos casos, a dos clases disyuntas. Este esquema de dicotomía sería el que se generaliza al interior de la clase 1 de los "grandes cuadrados", sin que el sujeto tuviera que notar la naturaleza heterogénea de la división pedida, ya que la reunión de los "grandes cuadrados" se efectúa aún de modo comprensivo: la división así generalizada conduce en ese caso a la segunda etapa, es decir que, entre todos esos grandes cuadrados, la mitad será considerada como "cuadrados" y la otra como "grandes".

Aquí llegamos a la tercera fase. Siendo la división anterior una generalización de las divisiones dicotómicas, el desarrollo posterior de las generalizaciones conducirá al sujeto a: a) buscar nuevas dicotomías considerando los elementos no incluidos en 1; y b) a buscarlos inspirándose en un primer momento, en las divisiones homogéneas que le permitieron oponer los cuadrados con los círculos y los grandes con los pequeños. Así, de (a) y de (b) resultan las falsas disyunciones (o simplemente no adecuadas) que ya aparecían en las fases anteriores, pero que prolongan más o menos las primeras vacilaciones de los sujetos de la tercera fase. Pero, ya que los elementos de la clase 1 vienen repartidos entre "grandes" y "cuadrados" en comprensión y con un principio de extensión, interviene otro factor (c) de generalización. Este consiste en conciliar las nuevas divisiones con la división interna en "grandes" y "cuadrados", imponiéndose en el interior de la clase 1. De allí surgen finalmente las disyunciones correctas del nivel IIA, en el cual la división heterogénea se extiende a las clases 2 y 3, gracias

a una regulación combinada de las extensiones y de las negaciones.

Pero en ese caso, queda por efectuarse una nueva generalización tendiendo a relacionar “los grandes” de la clase 1 con los “grandes pero no cuadrados” de la clase 2, así como los “cuadrados” de la clase 1 con los “cuadrados pero no grandes” de la clase 3. De allí viene la solución de disyunción no exclusiva con intersección, de la cual ya dijimos que constituye una síntesis de la identificación y de la disyunción simple.

Esta superación generalizadora que por fin le permite al sujeto liberarse de las clases disyuntas para elaborar divisiones heterogéneas, conduce, a partir de los 11-12 años, a esa generalización final constitutiva del conjunto de las partes.

III) Además, esas generalizaciones sucesivas presentan dos características notables que se deben a las relaciones entre las diferenciaciones y las integraciones, así como entre las comprensiones y las extensiones.

Pues, no cabe duda que las generalizaciones descritas (en II) no consisten solamente en añadir nuevas relaciones a las anteriores, sino que exigen una diferenciación continua de los subsistemas que se trata luego de coordinar. El esquema de división heterogénea, cuya disociación de las divisiones homogéneas resulta tan difícil hasta los niveles IIB y III (casos intermedios), es el producto de una diferenciación laboriosa entre las diferentes reuniones que se pueden efectuar según las dos dimensiones ↓y→de la tabla con doble entrada (la cual constituye el producto de las suplencias iniciales, siendo esas ya diferenciadoras).

Pero cabe distinguir dos tipos de diferenciaciones según se trate de variaciones extrínsecas, es decir, dadas en los objetos cuyas diferencias imponen las negaciones como si vinieran desde fuera (pero con la condición de traducir las comprensiones en extensiones), y de las variaciones intrínsecas, es decir, las que están ligadas con las implicaciones que surgen de los significados. Por ejemplo, las primeras se presentan cuando el sujeto aplica una misma forma a distintos contenidos. De allí provienen las generalizaciones simplemente extensivas. En cambio se dan las segundas cuando se trata de distinguir formas y de construir unas nuevas, lo que entonces supone una construcción de las negaciones por el sujeto mismo. Por ejemplo, los sujetos empiezan por confundir el “y” y el “o”, o sea xy y xVy, luego los diferencia y distingue posteriormente el “o” exclusivo xy V xy y no exclusivo xyVxyVxy, lo que implica que la cualidad x viene afirmada en xy y negada en xy. Además, esas variaciones intrínsecas constituyen la fuente misma de las generalizaciones constructivas, en el sentido en

que cada nuevo significado abre a su vez nuevas posibilidades.

Cada pareja (1,2), (2,3), etc., o trío (1,2,3), etc., de partes, conformados en un simplejo, conlleva en realidad un significado particular en tanto que reunión y que se distingue de la reunión total (1,2,3,4), la cual corresponde a un simple arreglo multiplicativo de los datos en juego.

Posteriormente, las diferenciaciones exigen integraciones en estructuras más ricas. Pero lo notable es que esa riqueza aumenta de acuerdo a las propiedades de las formas (comprensión), como al número de los contenidos (extensión). A este respecto existen dos grandes diferencias entre el conjunto de las partes y las simples reuniones. Para una reunión multiplicativa con 4 elementos, tenemos 16 "partes", y si hay 8 clases elementales, tenemos 256 "partes" (o sea 2n), lo que constituye un aumento considerable de los reacomodos de contenidos. En cuanto a la forma, las estructuras de esta combinación y del grupo INRC muestran lo suficiente el enriquecimiento en comprensión, puesto que en ese caso la integración es "complementaria" y no simplemente "coordinadora", ya que añade nuevas propiedades estructurales y no se limita a multiplicar las clasificaciones (como cuando se integra una clasificación pobre en otra más detallada). Ese doble enriquecimiento, en formas y en contenidos, no significa que desde el punto de vista estático de las propiedades ya construidas exista una excepción a la ley de relación inversa de la comprensión y de la extensión, sino que, desde el punto de vista de las transformaciones o variaciones intrínsecas, hay construcción correlativa (sucesiva o simultánea) de formas y de contenidos (éstos en sus nuevos arreglos con sus significados diferenciados).

En resumen, la construcción del conjunto de las partes constituye un ejemplo-patrón de generalización constructiva, tanto en el detalle de los razonamientos que conducen de una etapa a la siguiente, gracias al progreso de las extensiones y de las negaciones, como en la comprensión estructural de los puntos de partida y de llegada.

CAPITULO II
COMBINACION DE LONGITUDES

con A. Blanchet.

Esta investigación es similar a la anterior, pero se centra en las dimensiones espaciales y ya no en las clases de elementos discretos. A partir de un conjunto de 24 rectángulos que varían entre 10 por 9 y 5 por 3 cms., se pide relacionar algunos de ellos en la tabla según un alineamiento que parte de una muesca localizada enfrente del niño (y que siga perpendicular a su plano fronto-paralelo). El punto de llegada (también llamado "arriba") debe coincidir con una meta instalada de antemano (concretizada por una liga), pero sin rebazarla. Entonces, se trata simplemente de adicionar longitudes constituidas por los grandes lados de los rectángulos (LO), o por sus pequeños lados (LA), o añadiendo el lado LA de un rectángulo al lado LO de otro, etc. En realidad, estas combinaciones elementales son de 4 para dos rectángulos, de 16 para 4, etc., por consiguiente de 2n, y presentan de esta manera un carácter de conjunto de partes [7]. Por otra parte,

---

[7] Cabe precisar que no se trata de un "conjunto (completo) de partes", sino de lo que se podría llamar "el conjunto de las partes elementales", es decir, de parejas, tríos, cuádruplos, etc..., de elementos (cada una de estas asociaciones es distinta de las demás) y no combinaciones de n con n, que se podrían construir a partir de ellos. Designemos cada elemento por una letra, a, b, c, etc..., (que corresponderá al lado grande de un rectángulo) y los complementos por las negaciones a, b, c, etc, (pequeños lados de los rectángulos). Para un solo elemento, tendremos entonces la única pareja a y a; para 2 elementos, 4 parejas (ab, ab, ab, y ab); para 3 elementos, 8 tríos (abc, abc, abc, abc, abc, abc, abc, y abc); para 4 elementos, tendremos cuatro cuádruplos; para 5, 32 quíntuplos, etc. Lo que llamaremos el "conjunto de las partes elementales", y su fórmula es, sin duda, 2n, pero en la cual n=1, 2, 3, 4, etc. En cuanto al "conjunto (completo) de las partes", equivale a combinar n con n estas partes elementales, incluyendo n=O y n=totalidad. Entonces, tendremos para 2 elementos 16 partes posibles, para 3, 256, para 4, 65 356 partes, etc. En este caso, la fórmula sigue siendo 2n, pero n=2, 4, 8, 16 y ya no, 1, 2, 3, 4. En el caso de los rectángulos, este problema no tendría sentido sino el de añadir entre sí los diversos alineamientos posibles, mientras que, en el caso de los conjuntos y de las proposiciones, es precisamente esta combinación general la que interviene (16 operadores distintos para p y q, con p y q). Entonces existe a este respecto una diferencia notoria entre la investigación del capítulo I que, al referirse a las comparaciones entre dos divisiones distintas de conjuntos, pone de relieve un pro-

reunir rectángulos según sus lados largos solamente (Lo1 + Lo2) o bien, según sus lados cortos solamente (la1 + La2) corresponde a una relación entre clases disyuntas, mientras que la combinación de los dos sistemas La1 y La2 para obtener dos longitudes distintas totales con los mismos elementos, dándole vuelta a uno de ellos, y sobre todo (como a veces se presentará el caso) recurrir a diferencias entre lados grandes y lados cortos, e incluso a una suma de tales diferencias (Lo + La), corresponderá a lo que constituían, en el capítulo anterior, las divisiones heterogéneas entre clases no disyuntas (como los "grandes" y los "cuadrados"), y eso con mayor razón, ya que las preguntas hechas a los sujetos son también en ese caso preguntas de igualación.

Puesto que sólo se trata aquí de ajustar longitudes (Lo o La) y de construir de esta manera las longitudes totales de objetos compuestos, hasta formar un solo conjunto del cual los rectángulos sólo representan "pedazos", es interesante preguntarse si tales operaciones que, desde hace mucho tiempo llamamos "infra-lógicas" y que pertenecen a la "mereología" de Lesniewski ×, presentarán las mismas leyes de desarrollo que las operaciones lógicas acerca de las clases con sus relaciones de inclusión y de intersección.

En lo que se refiere a la técnica, primero notamos que las diferencias entre los grandes lados Lo y los lados cortos La de los 24 rectángulos se componen de 1,2,3 o 4 unidades, en un caso de 5 y en dos de 0 (cuadrados). Las dimensiones de los lados ya vienen inscritas, por ejemplo 7/5, y en los extractos de exámenes que siguen a continuación, escribiremos 7/5 o 5/7, siendo la primera de esas dimensiones la que fue utilizada por el sujeto. La tabla en la cual se realiza la construcción está graduada como los lados de los rectángulos; de tal modo que el sujeto no tiene que medir, ya que se le indica de antemano los números inscritos en los lados y en la tabla. La primera meta se sitúa entre 15 y 25, luego desciende a 8, pidiendo que se utilice varios rectángulos. Si el niño no utiliza espontáneamente las dos dimensiones Lo y La de los elementos escogidos, reducimos esta elección de manera a obligarlo a utilizarlas. También se puede pedir prolongar un alineamiento conservando los rectángulos ya colocados.

Luego, se prosigue con una pregunta más compleja: escoger los rectángulos adecuados para alcanzar, sin adición, sino con rotación, ambas metas indicadas de antemano (se da un ejemplo). En el caso de metas situadas entre 3 y 10, un solo rectángulo

---

ceso orientado hacia el conjunto (completo) de las partes, y la presente investigación que enfatiza el conjunto de las partes elementales, lo que supone un proceso diferente, pero igualmente necesario para la construcción del conjunto completo de las partes. Sin embargo, eso no hace desaparecer las analogías entre las dos investigaciones.

× p. 37: En efecto, esta lógica distingue relaciones de inclusión (lógica de los conjuntos), las de parte con totalidad, cuando estas partes son pedazos de un objeto continuo (la nariz para un rostro) o bien, elementos de una construcción concreta (los muebles de una recámara). Su axiomatización demuestra la presencia o falta de isomorfismo entre las estructuras "mereológicas" y las de los conjuntos, mientras que el estudiar las operaciones que llamamos "infra-lógicas" (precisamente porque la totalidad es un objeto y no un conjunto), sólo insistimos en los isomorfismos que son relevantes desde el punto de vista psico-genético.

basta; para metas distantes de 2 a 5 unidades y entre las cuales una es superior a 10, son necesarios dos rectángulos y la rotación de uno solo puede bastar para alcanzar la otra meta. Para metas distantes de más de 5 unidades, se impone la rotación de dos rectángulos.

La siguiente pregunta es capciosa: se colocan 1, luego 2 y hasta 5 rectángulos cuya diferencia Lo-La, siempre es de 3 y cada vez se pide alcanzar una meta situada 2 unidades más allá del punto de llegada anterior. La solución es imposible y se trata de explicar el por qué de esa imposibilidad. Después se eleva la meta de tres unidades examinando las reacciones. También se le pide al sujeto inventar un juego semejante en el cual el experimentador fracase a su vez.

Además, una pregunta general consiste en colocar un pequeño rectángulo (3/7) encima de uno grande (9/10) y se pregunta cuál de los dos es necesario voltear para extender lo más posible el alineamiento y por qué. Por fin, se pregunta cuántas combinaciones son posibles para alineamientos de 1,2..., n rectángulos.

§/1 -EL NIVEL IA- Ya que la evaluación perceptiva de los elementos es, a ese nivel, muy precisa, independientemente de las indicaciones numéricas, los sujetos logran sin dificultad contestar en la práctica las preguntas cuya solución no requiere una deducción o una anticipación representativa:

HUB (5;6) para una meta de 19, coloca 7/9, 8/10 y luego 3/6. Ya que hace falta un cm., reemplaza 3/6 por 4/7. Para 24, coloca 7/8, 8/10 y 8/9, o sea una suma de 23: quita 8/9 y lo reemplaza por el cuadrado 8/8 que le parece más adecuado por ser más pequeño: al obtener de nuevo 23, coloca 9/10. Para una meta de 8, coloca 8/9. "¿Otro? *-8/10-* ¿Cómo haces? *-Me fijo en los puntos* (unidades en la tabla)- ¿Los cuentas? *-No-* ¿Podrían ir otros? -(trata 9/10; 7/10, luego 8/8)- ¿Y qué más? -(6/8) *No-*. ¿Podría ir de todas formas? -(Le da vuelta pero después de cierta sugestión) *Así-*. ¿Y otros? -(Se vuelve a fijar solamente en los lados cortos) 7/8; 7/10 luego 7/9. *No-* ¿Ningún otro? -(7/8) *No-*. ¿Cómo se puede colocar a ese? -(Le da vuelta)- ¿Otros? -(Entonces se fija en los lados largos únicamente: 9/7; 7/5; 8/4)- ¿Y qué más? -(7/4; 9/4; 7/5; 8/5 (j.); luego 9/5; 7/6; 9/4; 9/5; 9/6...)- ¿Podrías poner varios? -(Trata con 3/7 + 3/6), luego los quita, pone 4/7 y 3/6 y los quita y logra 3/7 y 5/9)". Para una meta de 11, pone 10/9, lo voltea y lo reemplaza por 6/8 complementado por 5/9. En cuanto a alcanzar dos metas con los mismos elementos mediante rotaciones, HUB, por supuesto, logra alcanzar una sin preocuparse por la otra, y cuando se le recuerda la segunda, añade elementos exteriores en vez de voltear los que ya estaban colocados. Para 8 y 10, por ejemplo, obtiene 10 mediante 3/7 + 3/5 + 4/8, pero para 8, conserva 4/8 al cual le añade el elemento exterior 4/5. Se le presenta 9/10 y 3/7 y se le pregunta cuál hará avanzar según la más grande diferencia, volteándolos: empieza utilizando únicamente 9/10 sin darle vuelta; luego los compara y los voltea y vuelve a voltear 10/9, sin darse cuenta de que sólo pasa 10 a 9. En lo que se refiere a la pregunta capciosa de las diferencias de 3, concluye después de varias tentativas: "*No lo lograré, son demasiado pequeños*", sin darse cuenta de que su diferencia es demasiado grande.

RON (5;5) para 5/9 + 3/6: "Nos gustaría ir más arriba *-Hay que tomar cuadrados-* ¿Pero con ésos dos? *-No se puede-* -¿Y si mueves uno de los dos?- *No* -(Volteamos el 3/6)- ¡*Va más arriba*! ¿Y todavía más arriba?- (Voltea el otro) -¿Se puede hacer otra línea?- (La hace con otros elementos) -¿Y con esos?- *No*". Se vuelve a empezar con 10/8 y 7/6

pidiéndole las diferentes combinaciones: logra voltearlos, pero no encuentra otro arreglo posible. Luego, para ir más arriba que 5/9 + 5/4, los voltea ambos, lo que es justo para 5/9 pero sin ver que 4/5 es más corto que 5/4.

Si tratamos de comparar estas reacciones con la tendencia observada en los jóvenes sujetos del capítulo I, que sólo saben manipular clases disyuntas según divisiones homogéneas, no debemos concentrar primero en las reacciones iniciales de HUB: en primer lugar, se limita sistemáticamente a sumar entre sí lados cortos La sin recurrir a los largos Lo, y luego, después de una sugestión de rotación, se centra únicamente en los lados largos (Lo) y sólo vuelve a los lados cortos cuando se le pide utilizar varios elementos, en lugar de uno solo. En cuanto a RON, ni siquiera logra voltear un rectángulo por sí solo, y posteriormente la generalización de este procedimiento sigue siendo muy parcial; hasta tal punto que no se da cuenta que al voltear 5/4 en 4/5, disminuye el largo de la serie total, en vez de aumentarla como se le pide (cf. HUB para 10/9). Esta incomprensión de las rotaciones, antes de la percepción de los resultados, impide al sujeto perseguir dos metas a la vez con los mismos elementos: la segunda meta sólo se considera posteriormente e independientemente de la primera, y por lo general se utilizan nuevos rectángulos y no los mismos.

En cuanto a la pregunta central destinada a encontrar el mayor número de combinaciones posibles con los Lo y los La de dos o tres elementos, el sujeto Ron demuestra la insuficiencia de las soluciones propuestas en ese nivel IA: o bien el sujeto recurre a otros elementos, o se limita a voltear aquellos que ya están dados, o renuncia. Ni siquiera logra, para dos elementos cualesquiera, encontrar la manera de hacer la línea más larga de las cuatro posibles, y eso por falta de razonamiento sobre las diferencias como tales.

En pocas palabras, se puede observar que a este nivel las reuniones elementales a las cuales se limita el sujeto, recuerdan las divisiones homogéneas entre clases disyuntas de los jóvenes sujetos del capítulo I, y aun en el principio (o sea como en las primeras reacciones de HUB), ni siquiera hay división (sólo Lo, etc.). La razón de esta falta de diferenciación entre combinaciones posibles reside, por supuesto, en el hecho de que todavía los sujetos no controlan sus acciones sucesivas por medio de un juego de anticipaciones representativas, o sea por una conceptualización: simplemente, realizan varias tentativas, fundándose únicamente en sus percepciones, por lo general excelentes, y en los resultados de las acciones anteriores, mejoradas mediante regulaciones con "feedbacks" negativos (corrección de los errores). De allí resultan muchos éxitos, pero esos se dan por "tentativas y errores" y sin ninguna comprensión de los problemas planteados, ni del por qué de los éxitos o de los fracasos.

§/2 -EL NIVEL IB- Este nivel se caracteriza por un solo progreso con respecto al anterior, pero ese tiene una gran importancia: es la coordinación naciente entre las conductas de alineamiento (adición) y de rotación (paso de Lo a La, o vice-versa). Aparte de eso, las soluciones siguen siendo obtenidas por simples acciones con vacilación:

FAB (6;0), para una meta de 8, empieza por 5/5, luego encuentra 8/10, luego 6/9 y 8/9: "*Porque son grandes hasta aquí*". Cuando se le sugiere más de un elemento, logra obtener 3/6 + 5/5, y para 13, 9/10 + 4/7. Para ir más arriba, propone añadir otros pero no se atreve a voltear unos porque algunas cifras inscritas en el rectángulo estarían de cabeza; informada de lo posible de esta solución, logra alargar el alineamiento: "*Pues, voltearé el grande*". En el caso de la doble meta, utiliza esta posibilidad de volteo pero solamente a la luz de los resultados anteriores marcados y no todavía mediante una anticipación: para 13 y 18, logra 13 y luego para 18, después de haber querido añadir otro elemento, voltea otro, pero sin éxito: "*No se puede, es demasiado grande*", etc. En cambio, después de haber logrado rápidamente 23, se le pide llegar a 25 sin adiciones: entonces, voltea espontáneamente en 10/7, 8/7 y 10/9 los elementos que formaban 23 y obtiene así 28; luego conserva un 18/7, el 10/9 y voltea un 8/7, de allí 25. Asimismo logra, por vacilaciones y volteos, pasar de 26 a 28. Para la solución imposible de las diferencias por 3, trata todas las combinaciones y concluye: "*Si los ponemos así* (enseñando 9/6), *rebasa, si los ponemos así* (9/6 + 10/7) *rebasa todavía más, y luego los dos así* (volteados) *está demasiado abajo*".

VAL (6;5) primero fracasa con una meta de 20, pero, para 8, coloca correctamente 3/7 +5/9. "Luego, ¿para otro o dos más? -(4/9 +4/8)- ¿Y más? -(5/8 + 3/6)- ¿Y uno solo? -(7/9 que quita y pone 8/10)- ¿Otro solo? -(Trata 10 entre 6/9 y 9/10 y logra dos soluciones justas)-. ¿No hay más? -*No*- ¿Y poniéndolos de otra manera? -(Voltea 7/8 en 8/7). *Sí*, (Voltea otros con éxito)". Para la doble meta, se empieza por la pregunta más fácil que indica que voltear uno solo basta: "¿7 y 9? -(Coloca al azar 7/9 para obtener el 7 y sin ver que el rectángulo es también adecuado para el 9)- Está bien para la primera meta. ¿Y para la segunda?- (Añade 3/7 a 7/9, luego 4/9 y 4/5). -¿Pero puedes lograrlo con el mismo rectángulo?- *No* (luego lo voltea) *Sí*. -¿Y para 8 y 10?- (Coloca 4/5 3/5, quita el último y lo reemplaza por 4/6, de allí los 8 pedidos) -¿Y para 10?- (Voltea 4/6 en 6/4) Allí está." En cambio para 9 y 11, así como para 10 y 12, las tentativas son más laboriosas: busca las dos metas por separado y las logra con 17 tentativas para 9 y 11, de las cuales sólo 5 rotaciones; asimismo para 10 y 12 con una buena solución final (3/7 + 4/6 + 3/6 para 10 y rotación de 3/6 + 4/6 para 12). Lo interesante del caso es que, llegada a 12, VAL necesita hacer muchos esfuerzos para reproducir la repartición que acaba de realizar para llegar a 10. Asimismo, para 13 y 15, obtiene las soluciones después de numerosas tentativas de adiciones y de rotaciones, pero Val no se acuerda de los elementos que ha volteado e indica 1 falso cada 3: "¿Ese está bien?- *No* -¿Y por qué los dos otros están bien?...". Entonces se le pregunta "¿cuál (entre 9/10 y 3/7) hará ir más arriba (volteándolos)?- *Ese* (3/7) *porque es más delgado y el grande es más ancho*". Diferencias de 3 para una meta más alta de 2: después de múltiples tentativas, VAL dice: "*no se puede* -¿Por qué?-...".

La rotación de un rectángulo, en tanto que acción, conduciendo a utilizar la dimensión Lo o La no elegida en un principio, representa ya un descubrimiento casual, pero sólo se da en algunos casos de tentativas y no constituye aún un procedimiento destinado a modificar

la longitud total del alineamiento que desemboca a la meta. La novedad propia de este nivel IB reside más bien en el hecho de que el sujeto, después de haber constatado el papel jugado por la rotación en la obtención de cierta longitud total, utiliza posteriormente este procedimiento coordinándolo con simples adiciones, cuando se trata de alcanzar una meta dada. Resulta que, en lo que se refiere a los problemas de doble meta (o, como en el caso de FAB, de aumento de 23 a 25, o de 26 a 28), el sujeto no está tan lejos de los éxitos empíricos, como es el caso de VAL que encuentra bastante rápido las soluciones simples y sólo necesita más tiempo a partir de 9 y 11.

Las generalizaciones de este procedimiento plantean al nivel IB un problema interesante, referente a su naturaleza. En parte no más, se trata de una generalización constructiva en la medida en que el sujeto empieza a entender que un rectángulo no cuadrado presenta dos dimensiones distintas y que, al voltearlo, se obtiene necesariamente una nueva longitud Lo o La: de allí la posible utilización de la rotación. Pero aquí, sólo se trata de una operación previa destinada a fijar los significados, o sea de un simple marco general y no de un mecanismo que diera cuenta del paso de una acción a la siguiente. Pues, por lo que se refiere al detalle de esta utilización, el niño no logra todavía inferir las consecuencias de una rotación particular: por tanto, sólo a la luz de los resultados de su acción, puede rechazar, aceptar o generalizar tales tentativas, y en ese caso, es obvio que la generalización sigue siendo inductiva. Por ejemplo, FAB renuncia a las rotaciones en el momento en que fracasa con una ("No se puede, es demasiado grande"), luego las adopta con exceso después de un éxito para pasar de 23 a 25 (es cuando obtiene 28). VAL empieza por no darse cuenta de la rotación posible del 7/9 para las metas de 7 y de 9, pero, después de haber constatado el éxito de su acción, la generaliza posteriormente con tan poca comprensión que, poco tiempo después, no se acuerda de los elementos que acaba de voltear y no sabe decir por qué algunas rotaciones fueron afortunadas. Por tanto, se queda con juicios globalmente perceptivos y cree que 3/7 volteado hará ir más arriba que la rotación 9/10, simplemente "porque el primero es más delgado".

§/3 -EL NIVEL IIA- La novedad propia de este subestadio IIA reside en el inicio de las inferencias acerca de las relaciones entre las dimensiones Lo y La de un rectángulo y las de otro, o sea, tratar de cuantificar los alineamientos previstos para alcanzar las metas. Estas búsquedas de cuantificación se caracterizan además por la utilización de los números indicados en los rectángulos y en la tabla:

FRA (7;3) después de haber alcanzado 8, compone 13 con 9/10 y 5/9 que inmediatamente reemplaza por 4/5. "¿Podrías ir más arriba con los dos? -*Pongo otros*- ¿Solamente con esos dos? -(Los voltea inmediatamente en 10/9 y 5/4)". Doble meta, 13 y 18: "¡*Ay!*, ¡*Hay que tratar* (pone 10/9 y 5/9, luego trata con 7/10 y 6/10, lo que le da 13)- ¿Calculas? (Pone 7/10 + 6/9 + 5/9, lo que equivale a 18 y quita 5/9) para ir hasta 13- ¿Pero con los mismos rectángulos para 13 y 18? (Voltea en 10/7, luego busca con 8/0 para obtener 18, pero está obligado a realizar adiciones para volver a encontrar 13, bajo la forma 7/10 + 3/7 + 3/5)- ¿Y hasta 18? -*Se debe poder obtener* (voltea en 10/7 y 7/3). *No está bien* (luego en 10/7 + 3/7 +5/3) *Está bien*". Para dos metas de 13 y 19: cambia 3/5 por 6/4." *No está bien* (Conserva 10/7 y añade 3/7 6/4) *Aquí está 19* -¿Y para 13?- *Hay que quitar 6/4* -¿Pero sin quitar nada?- (Voltea en 7/10 + 3/7 + 3/5; lo que equivale a 13 y 7/10 + 7/3 = 5/3 = 19) *Sí*". Para 14 y 20, encuentra inmediatamente 6/10 + 8/10 = 14 y 10/6 + 10/8 = 20, pero para 12 y 20, hace varias tentativas fracasadas, limitándose a decir: "*Se necesitaría 10 para el gran número*". Solución imposible (por 3): hace varias tentativas y concluye: "*No puede ser, estaba seguro*". Comparación de 3/7 y 9/10: "*Allí* (9/10), *si se voltea sólo hace avanzar de una marca, mientras así* (7/3) *se avanza de 3*".

JER (7;7) para una meta de 8, encuentra inmediatamente 7 soluciones, 8 sin error, luego pregunta: "¿*Se puede meter otros*? -Como quieras- (Pone 6/9 + 3/7 que reemplaza por 5/5 + 3/7, lo que da 8)". Idem para una meta de 11. Doble meta: para 13 y 18 no encuentra solución, pero para 6 y 9, propone inmediatamente 6/9 y muestra que basta con voltearlo para obtener las dos soluciones. Para 9 y 13, propone, después de dos tentativas fracasadas, 6/10 y 3/5, de allí 6 + 3 = 9 y 10 + 3 = 13. Para 13 y 18, trata con 8/10 + 9/6, luego con 8/10 + 5/8 para 13 y "*da una idea*: (10 + 8 = 18). -Y, ¿con dos más?- (Hace tres tentativas y encuentra 7/10 + 6/8)". Para 13 y 19, 14 y 20, y 13 y 20, se demora, pero logra finalmente las soluciones que acompañadas siempre de observaciones demuestran que piensa en las dos metas a la vez: "*Trato de hacer un poco más grande* (lado de la meta superior) *o un poco más pequeño* (la otra)", o "*Hice mal la cuenta de este lado*", etc. Soluciones imposibles: "*No es posible porque es* (el elemento final) *1 de más*".

GUY (7;9) fracasa con las dobles metas 8 y 5 probablemente porque no entiende el significado del problema, ya que para 6 y 9 propone inmediatamente 6/9 y lo voltea diciendo: "*Ya entendí*". Asimismo resuelve el problema 8 y 10 (dando 8/10), luego 13 y 15: "*Se puede hacer así* (8/10 y 5/7) *para ir hasta 13* (y 10/8 5/7 para 15)". También logra 13 y 19 y en cuanto a las soluciones imposibles, dice: "*Así es demasiado grande y así es demasiado pequeño*".

GAR (8;3) construye un alineamiento correcto de 28. Se le pide llegar hasta 30; quiere añadir 2/5 pero se le pide que lo haga con los mismos elementos: voltea algunos, llega hasta 32 y quita las rotaciones inoperantes para obtener 32.

CAT (8;6) para 8 y 10, coloca inmediatamente 8/10 y luego, para 6 y 8 escoge 6/8. Para 17 y 13: "¿*Con dos elementos solamente*? -Puedes tomar más. -(Trata con 3/7 + 6/5 +8/10 = 17, pero no obtiene 13, después de cierta vacilación propone 7/3 + 4/5 + 6/8, o sea una solución correcta". Soluciones imposibles: "*Todavía es demasiado grande* (después de varias tentativas). ¿Hubieras podido adivinar? -*No*".

Vimos que en el nivel IB, el sujeto empieza a coordinar las adiciones y las rotaciones, pero sin deducción anticipada de los resultados a obtener, que solamente se conocen después de haberlos realizado y que, por tanto, sólo permiten generalizaciones inductivas (o del tipo "funciona, entonces volvamos a empezar"). Las reacciones observa-

das en el presente subestadio IIA, ofrecen en cambio un progreso notorio: el niño se da cuenta inmediatamente de las dos dimensiones del rectángulo dado y establece, todavía vacilando, la relación con las de los demás: de allí un principio de desarrollo de la generalización constructiva que, de simple marco, se vuelve el instrumento de una cuantificación, relacionando de esta manera los valores adicionados Lo y La con la longitud prevista del alineamiento necesario para alcanzar la meta.

El primer indicio de esta transformación del funcionamiento de la generalización reside en el hecho de que el sujeto entiende realmente el problema que se le plantea en el caso de las dobles metas: capta inmediatamente (o casi: ver GUY en el momento en que dice "Ya entendí") que no se trata de alcanzar una meta después de la otra sino las dos al mismo tiempo y con los mismos elementos entre los cuales sólo será necesario voltear unos, simplemente en Lo o en La. He aquí entonces, un caso claro de doble división, un poco más fácil que para los sujetos del capitulo I, sin duda porque no se trata aquí de cualidades heterogéneas, sino únicamente de longitudes repartidas de modo diferente. Eso no impide la necesidad de pensar en dos divisiones al mismo tiempo.

Sin embargo, todavía estamos lejos de una combinación sistemática porque, si bien el sujeto puede relacionar de esta manera dos divisiones, no es aún capaz de diferenciarlas todas y de coordinarlas. Dos series de hechos lo demuestran claramente. La primera es que, ya una vez lograda una combinación, no puede o le cuesta mucho trabajo encontrar otras (JER después de 3 tentativas). La segunda es que, si por lo general se logran finalmente los problemas de doble meta, fueron necesarias muchas tentativas que hubiera sido fastidioso transcribir en el detalle, y con ocasionales confusiones, sobre todo en cuanto a la utilización de los números (por ejemplo GUY dice con respecto a una de sus tentativas: "Sería preciso uno más pequeño que también llevara la indicación 9/5"). En efecto, no hay que olvidar que se trata, en el nivel IIA, del principio de "las operaciones concretas", lo que significa un uso de la deducción todavía ligado con las acciones materiales y con las observaciones acerca de los objetos, o sea mediante abstracciones "seudo-empíricas" y no todavía "reflexionadas" como en el estadio formal de 11-12 años. La diferencia entre estos estadios se nota, sobre todo, en el caso de las soluciones imposibles: ninguno de los sujetos entiende la razón general según la cual, con diferencias de 3 entre Lo y La, no se puede aumentar un alineamiento con un suplemento de 2 unidades. El niño se limita a constatar que tiene 1 de sobre (JER) o "es demasiado pequeño... o demasiado grande..." (GUY). FRA dice acerca de la imposibilidad "estaba segu-

ro", pero no da ningún motivo explícito. En cuanto a CAT, más honesto, reconoce que no hubiera podido adivinarlo.

§/4 -EL NIVEL IIB- En muchas investigaciones, en particular acerca de la causalidad, el nivel IIB da la impresión de una regresión aparente con respecto a algunos puntos, pero en el análisis, descubrimos que el sujeto se plantea en realidad nuevos problemas que complican las tareas. De allí la impresión de que buscan tres pies al gato. En el caso de la presente investigación, el fenómeno es sumamente evidente porque si los sujetos razonan cada vez más, no se observan progresos en los resultados de IIA y de IIB, sino, en cambio, varias regresiones aparentes cuya causa nos queda por investigar:

BRI (9;1), para obtener 7 rechaza 7/6 porque "*allí* (7) *está bien, pero el otro* (6) *no puede ser*". Acaba por aceptarlo pero con reticencias y precisando que por ejemplo 9/8 para una meta de 9 "*se puede hacer 9/8 porque si se pone 8/9 es demasiado pequeño y si se pone 9/8 está bien*". En cambio, logra inmediatamente alcanzar las dobles metas 7 y 9, 8 y 10: vacila más para 9 y 11, pero ve rápidamente que se necesitan dos rectángulos; para 10 y 13, los calcula (9/7 + 3/7 y 7/9 +3/7) y además observa, sin controlarlo, que estas adiciones de longitudes son conmutativas: "*También se puede hacer lo inverso* (= cambiar el orden)". Las dobles metas más complejas provocan las mismas vacilaciones que en IIA, pero vienen acompañadas de comentarios de intenciones: "*Este es más alto*", si se le da vuelta, "*reduje de una unidad*", aquel "*sólo va de un lado*", etc. En cuanto a las soluciones imposibles, concluye "*serían necesarios dos grandes y uno muy pequeño*", "*tendría que haber 2 de más*" y no una diferencia de 3.

TIE (9;2): largas vacilaciones para las dobles metas porque "*trato de calcular*". Para los problemas-trampa, ve rápidamente que "*es imposible*": "*allí hay uno de más*" al tratar de alcanzar 20 "*en todos los casos da 21* -¿Por qué?- *Porque Usted los escogió*". Cuando se le pregunta si las diferencias son siempre las mismas, ve claramente que "*sí, de 3 espacios* -¿Entonces, por qué no está bien?- *No sé.* -¿Pero, cómo harías?- *Escogería que haya 2 menos*".

ANT (9;9) alcanza las dobles metas después de largas vacilaciones, pero contando primero la diferencia que los separa y de lo cual resulta a veces más molesta que aventajada. Para las soluciones imposibles: "*se ve que hacen falta dos y se ve en los números que no hay 2, ningún 2 escrito en los rectángulos*", como si las diferencias fueran dimensiones combinatorias. "¿Cuántos montones diferentes puedes hacer con eso (2 rectángulos) - *4* (los hace) -¿Y con un tercero?- *Allí hay 4* (para 2), *se puede hacer así* (rotación del mismo): *son 6*". Con 4 y 5 rectángulos, resultarán 8 y 10 arreglos posibles, o sea 2 de más cada vez.

COR (9;9) da para las soluciones imposibles una explicación que cabe dentro del estadio III, "*allí hay 3 de diferencia y no 2 unidades entre cada uno*". Pero sus modos de proceder para las dobles metas no superan los del nivel IIA, y las respuestas a las preguntas de combinación siguen siendo las de este nivel IIB. Para 2 rectángulos, encuentra con razón que se pueden hacer 4 alineamientos distintos, pero para 3, sólo encuentra 6, luego un séptimo, pero no 8. Se le pide analizar el detalle y admite: "*4 y 4 cuando los volteamos* -¿Y con 4 rectángulos?- *12; se añaden 4 posibilidades*". Tratamos de hacer que lo describa: "*16, no 22*", etc.

DRE (10;1), combinación: "¿Con el rectángulo, cuantos montones diferentes?- *Uno solo* (voltea). *No, 2* -¿Y con los 2?- *4* (Lo hace) -¿Y con 3?- *Pues 6* (muestra 6) -(Le enseñamos otro, pero sin lograr convencerlo). *De todas maneras 6. Si añadimos más, da 8, siempre 2 de más*".

Basta con los hechos para entender la situación paradójica de este nivel IIB. Por un lado, los sujetos deducen más que en IIA y muchas veces calculan antes de constatar, lo que representa un progreso en la generalización constructiva. Las reacciones con respecto a las soluciones imposibles, también son mejores (e incluso COR encuentra la buena explicación). Pero, por el hecho de que intentan reflexionar antes de actuar, los riesgos de errores aumentan y se multiplican las vacilaciones. Esa es una primera razón de las aparentes regresiones. Una segunda razón que sólo interviene en algunos casos, es que sus progresos en la comprensión de las superficies les impide a veces disociar una sola dimensión de este sistema bidimensional, y eso es lo que nos demuestra BRI (mientras que se ve reconfortada cuando se definen las dos metas). Pero, a pesar de sus progresos en el razonamiento, estos sujetos siguen estando al nivel de las estructuras de agrupamientos, con sus clases disyuntas y sus composiciones progresivas, o sea sin combinación. Por ejemplo, vemos a ANT, COR y DRE calcular el número de los alineamientos posibles mediante un procedimiento meramente adicional: 4,6,8, etc., sin alcanzar el conjunto de las partes elementales (parejas o tríos de base).

§/5 -EL ESTADIO III-En este nivel de 11-12 años, se observa por fin la utilización correcta de las deducciones:

TRI (11;8). Doble meta de 14 y 19: "(Pone 7/10 y 6/10). *No, éste no,* (7/10) (que reemplaza por 10/9). *Hay que restar 1 a 10 + 10. En el lado corto, está bien* (porque 8 y 6 son 14), *pero no en el lado largo.* -¿Entonces?- *Se necesita un* 9/6. *Ya capté 9/6 y 10/8.* -¿Y hasta 15 y 20?- *Otro grande. Se necesita un 5. No* (conserva 8/10). *Necesito otro 10 para lo alto y luego un 5 : 5 + 10 serían 15. No, necesito un 5 más alguna otra cosa* (toma 10/6). *Este es, entonces está bien con un 10/9* (correcto). -¿Y si hubieras dejado 10/8?- *Se necesitaría 10/7* (correcto)". Soluciones imposibles: después de varias tentativas, dice que "*eso tampoco está bien porque siempre hay 3 de diferencia*" y tendría que "*ser 2 (menos) antes, o sea 1 después (de más)*".

SIM (11;11) encuentra, después de dos tentativas, 8/8 + 3/6 para las metas de 11 y 14. Para 11 y 17, conserva 8/8 y calcula 17 — 8 = 9; entonces, habría que sustituir 3/9 a 3/6, pero 3/9 no existe. Conserva 8/8 y deduce: "*9 de alto y 3* (además de 8) *del lado corto, entonces no es posible con 8/8*", pero constata que estaba equivocado cuando decía "*si se redujeran estos números, habría que aumentar el otro*". Liberado de esta hipótesis (debida a un escrúpulo de naturaleza operatoria), encuentra su método que enuncia escogiendo (después de varias tentativas) 10/8 y 10/6 para las metas de 14 y 20: "*Se llega a 20 con 10 más 10 y para llegar a 14, se toma 6 y 8*". Generaliza este método para los casos siguientes. Soluciones imposibles: después de varias tentativas, concluye: "*son siempre de 1 menos o de 1 de más (07), y hay 3* (de diferencia) *en todos.* -¿Por qué

no llegas a 2 de más?- *Porque hay 3 siempre llegaré un poco más arriba que ellas*". Combinación: "¿Cuántas posibilidades con 2 rectángulos- *4* -¿Y con 3?- *9* (el cuadrado). -¿Por qué?- *No, 6* (lo intenta). *No tampoco, cada uno puede moverse dos veces* -¿y con 4?- *Cada vez se suplica: 2,4,8,16 si se trata de lógica*". Para 4, "*hay 8 posibilidades de costado* -¿Y de alto?- *8 también, en total 16*".

MAR (12;4) se propone como método partir de un elemento igual a la diferencia entre las dos metas: por ejemplo para 11 y 17, parte de 6/8 y obtiene: "*entonces, hay que añadir el 9/4, no 9/5*". Soluciones imposibles: "*No hay una diferencia de 2...* (entonces una diferencia de) *5, tampoco está bien, no es un múltiple* (de 3)". Conjunto de las posibilidades: 2 para 1, 4 para 2 (los realiza), entonces 8 para 3: "*Con 4, hay 16 posibilidades, y luego: 32,64,128,256,512*".

A este nivel de las operaciones formales, aumenta evidentemente la importancia de la deducción, pero esa vez sin error de utilización. Por supuesto, los problemas de doble meta siguen ocasionando vacilaciones y errores, pero hasta podríamos decir que son inteligentes y en todo caso inteligentemente entendidas (TRI: "Se necesita un 5... no, un 5 más otra cosa" o, cf. la falsa hipótesis de SIM). La novedad reside entonces en el hecho de que el sujeto encuentra un método para calcular inmediatamente a partir de las metas, las dimensiones que debe proponer: MAR propone un elemento igual a la diferencia entre las metas, luego deduce lo que le queda por añadir, y SIM procede por descomposición de las metas (20 = 10 + 10 y 14 = 6 +8). Para las soluciones imposibles, se encuentra la explicación: no se puede lograr una diferencia de 3 con múltiples de 3, lo que MAR dice hasta de un modo explícito.

En cuanto a los diversos arreglos posibles para alineamientos con un mismo número de elementos, se trata de calcular todas las parejas, tríos o cuádruplos, etc., distintos que componen los alineamientos. Eso es lo que podríamos llamar el conjunto de las "partes elementales" o asociaciones de base cuyo "conjunto completo de partes" proporcionaría las combinaciones n con n. Pero ya se trata de una combinación 2n, puesto que cada nuevo elemento está por relacionar con los anteriores. Vimos que en el nivel IIB, los sujetos sólo ven en ello una composición adicional (4,6,8,10, etc.) como si el nuevo elemento sólo añadiera dos posibilidades (Lo o La). También a veces los sujetos del estadio III empiezan de esta manera, pero rápidamente se dan cuenta de que el nuevo elemento se combina con cada uno de los demás, de allí la solución multiplicativa.

§/6 -CONCLUSIONES- Los resultados de esta investigación son interesantes desde el punto de vista de las diferentes formas de generalización. Recordamos en primer lugar que, si es fácil construir la tabla de los estadios del desarrollo de una noción o de una estruc-

tura (preoperatoria u operatoria), ambas debidas al funcionamiento de la abstracción y de la generalización, éstas últimas, en cambio, sólo son funciones (en el sentido biológico del término, y en oposición con los órganos que representan las nociones y las estructuras). Pues, una función es permanente, a pesar de que utilice diversos órganos (cf. la nutrición y sus múltiples formas), de tal modo que no incluye estadios en tanto que función. En cambio, presenta múltiples formas de funcionamiento relacionadas con los órganos y el problema biológico reside, entonces, en saber si es la función la que "crea" el órgano o lo inverso. Desde el punto de vista del conocimiento, pensamos que la función de generalización engendra estructuras que mejoran su funcionamiento, de allí el surgimiento de nuevas estructuras, etc. Los estadios que se pueden observar son entonces los de las estructuras, pero su análisis permite la del funcionamiento que va mejorando conforme se pasa de un nivel a otro (sin que eso le permite por sí sólo determinar aquéllos).

A partir de eso, tratemos de distinguir para cada uno de esos niveles, dos tipos habituales de generalizaciones: 1) la inductiva, que se limita a aplicar a nuevos objetos un esquema ya conocido por abstracción empírica, o por abstracción reflexionada (pero, en este último caso, cuando el esquema fue elaborado anteriormente a la generalización actual y sin que dicha elaboración intervenga en el mecanismo mismo de esta generalización; 2) la generalización constructiva que engendra nuevas formas por complementación o diferenciación de una operación. Esta segunda forma de generalización significa un progreso en comprensión, así como, por supuesto, en extensión (en tanto que ésta se encuentra subordinada a la comprensión): de allí la creación de nuevos contenidos o el enriquecimiento de contenidos empíricos, en ese caso apareciendo bajo nuevas formas. De una manera general, el criterio de la generalización inductiva reside en el hecho de que se funda en las constataciones o en el solo resultado de las acciones, mientras que la constructiva generaliza las acciones mismas o las operaciones, ampliando y complementando sus formas anteriores.

Según tal punto de vista, las reacciones del nivel IA son claras: el sujeto sabe perfectamente arreglar los rectángulos en un alineamiento para alcanzar una meta determinada, pero no logra razonar correctamente sobre las diferencias de longitudes entre las dimensiones Lo y La de dichos rectángulos. La simple adición de las longitudes implica, por supuesto, un esquema de acción por parte del sujeto, pero éste es de formación muy anterior (últimos niveles sensorimotores) y simplemente aplicado a los nuevos objetos presentados. Por tanto, se trata de una generalización esencialmente inductiva, con,

obviamente, diferenciaciones según las metas, pero guiada por la sola percepción sin que intervenga ningún cálculo. Con respecto a la poca comprensión de las diferencias, he aquí la prueba del poco poder de generalización constructiva que poseen estos sujetos.

En cambio, en el nivel IB, la generalización constructiva parece progresar sensiblemente, gracias a los principios de utilización intencional de la rotación, coordinada con las adiciones. Se da la construcción de una nueva forma, por diferenciación y complementación combinada del esquema de adición de las longitudes. Pero observamos en el #2 los límites todavía importantes de esta generalización constructiva, ya que el sujeto sólo se da cuenta del éxito o el fracaso de una rotación a la luz de los resultados obtenidos, lo que sigue siendo de naturaleza inductiva, mientras que el proceso constructivo sólo constituye a este nivel, una suerte de marco, o sea de nueva forma, que queda por llenar empíricamente sin gran enriquecimiento del contenido.

Ahora, con el nivel IIA, asistimos a un progreso más claro de la generalización constructiva: perseguir dos metas al mismo tiempo sin cambiar los elementos y sólo modificando, mediante rotaciones, las longitudes totales, aun si eso se logra únicamente gracias a soluciones no deducidas sino a partir de múltiples vacilaciones, equivale a complementar un esquema de adición homogéneo por otro diferente. Y ya que se trata de los mismos elementos, volvemos a encontrar el problema de las dobles divisiones o divisiones heterogéneas cuyas dificultades fueron examinadas en el capítulo I. En otros términos, ya se da a este nivel operación (coordinación) sobre operaciones (divisiones), y éste es el carácter más general de la generalización constructiva, aun si a este nivel sus poderes son todavía modestos (número y duración de las tentativas previas).

Si el nivel IIB se caracteriza por mayores esfuerzos de deducciones anticipadoras, los resultados no se pueden calificar, como ya lo vimos, como muy positivos, salvo en lo que se refiere a una explicación mejorada de las soluciones imposibles. En cambio, en el estadio III, predomina la generalización constructiva, y eso sobre dos puntos por lo menos. Por una parte, las cuestiones de doble meta conducen finalmente a la elaboración de un método deductivo que permite dominar, mediante el cálculo, las coordinaciones propias de las divisiones heterogéneas. De allí, como correlación, la comprensión de la imposibilidad de resolver los problemas capciosos (diferencias de 3 para un alineamiento de 2), lo que supone la utilización de una suma de diferencias. Por otro lado, el problema del número de alineamientos posibles para un conjunto dado de rectángulos que, al nivel IIB sólo conduce a falsas soluciones adicionales, por fin se resuelve. Esto re-

presenta un ejemplo notorio y casi puro de generalización constructiva (una vez hechas las constataciones mediante abstracción seudo-empírica, sobre las 4 combinaciones posibles para 2 rectángulos).

En resumen, si encontramos en todos los niveles generalizaciones inductivas y otras constructivas (anteriores y que sirven de marcos, o actuales y de algún modo motrices), parece obvio que las segundas predominan cada vez más y subordinan a las primeras según un proceso continuo.

CAPITULO III
FORMACION DE PAREJAS, TRIOS, ETC., ENTRE NUMEROS SUCESIVOS

con M. Lavallee y M. Sole-Sugranes.

Después de los problemas de división entre clases o entre longitudes, conviene estudiar ahora la generalización constructiva en lo que se refiere a problemas de recurrencia, numérica o espacial (Cap. IV y V). El presente estudio se centra en el problema más elemental que encontramos para permitir al niño resolverlo y al experimentador informar de las simples constataciones del sujeto y de sus razonamièntos explicativos, o sea de los dos tipos posibles de abstracción y de generalización. A partir de una serie de 3,4,5, etc., términos (barras verticales), simplemente se tratará de determinar el número de parejas que se pueden construir entre elementos contiguos relacionados, en este caso, por ligas (o sea, 1-2, 3-4, etc. y no 1-3 o 2-4), luego el número de tríos de elementos contiguos (o sea, 1-2-3, 2-3-4, etc.), el de los cuádruplos, etc. Las relaciones a establecer equivalen sencillamente a encontrar que, con n elementos se pueden formar n-1 parejas, n-2 tríos, n-3 cuádruplos, etc. Estas relaciones implican dos tipos de recurrencias: Ley (1): el aumento de un grado de un conjunto cualquiera (por ejemplo el paso de los tríos a los cuádruplos) disminuye de 1 el número de conjuntos posibles con los mismos elementos. Ley (2): todo aumento de n elementos añadidos a n permite construir n conjuntos adicionales, cualquiera que sea su grado: por ejemplo con n = 5 elementos, obtenemos 3 tríos y con 7, 2 de más.

En lo que se refiere a la técnica, el material consiste en una tabla de madera de 80 cms. por 8 cms. con hoyos que se sitúan cada 6 cms., o sea 12 hoyos; 12 barras de latón de 5 cms. de alto y ligas de diferentes largos y colores. Para el control, se utiliza otra tabla de madera de 80 cms. por 8 cms. con hoyos situados a intervalos irregulares, o sea también 12 hoyos. Después de la presentación del material, las etapas de la interrogación son las siguientes:

Primera parte: *Formación de parejas-* Se colocan tres barras en los tres primeros hoyos de la tabla y se le explica al niño que se trata de agruparlos 2 por 2, mediante ligas, de tal modo que se utilicen todas las barras respetando la contiguidad y que no se deje ningún espacio vacío entre las barras. Se pregunta: "¿Cuántas ligas se necesitarán para amarrar los n elementos 2 por 2, sin dejar hoyos entre los grupos?"

A/ Parejas con 3 elementos:

- anticipación del número de ligas necesarias;
- constatación: el niño realiza efectivamente los grupos.

En caso de necesidad, el experimentador ayuda al niño a encontrar los 2 grupos posibles. Esta primera realización nos permitirá establecer una buena comprensión del problema.

B/ Parejas con 4 elementos: anticipación, realización (si es necesario con la ayuda del experimentador) y explicación: se le pregunta al niño decir lo que hizo, para que descubra el (n-1), y, en su caso, preguntarle el por qué.

C/ (Para los niños más jóvenes)
Parejas con 5 elementos: mismo proceder.
Parejas con 6 elementos: mismo proceder.
Parejas con 7 elementos: mismo proceder.
Para los niños más grandes, se varía el número de elementos añadidos, o sea 2,3, etc.

D/ Generalización con grandes números, a partir del momento en que la regularidad ha sido descubierta y memorizada por el niño. En ese caso, sólo anticipación y explicación.

E/ Formación de n parejas con n elementos.

Segunda parte: *Formación de tríos*- Mismo proceder que en la primera parte, pero se empieza con 4 elementos.

Tercera parte: *Comparación* entre los resultados obtenidos en la formación de parejas y de tríos.

Cuarta parte (con los niños más grandes): *Explicación de esta ley.* Formación de cuádruplos y quíntuplos para destacar una ley de construcción más general.

§/1 -EL NIVEL IA- Los sujetos del nivel IA logran naturalmente construir las parejas, pero menos los tríos (a causa de una tendencia a sólo considerar a este nivel los conjuntos disyuntos). En cambio, ya les cuesta algo de trabajo tomar conocimiento del resultado de sus acciones y a fortiori a tomar conciencia del mecanismo de éstas, o sea del esquema de construcción que por sí solo sería explicativo:

PAT (4;6) con 3 barras toma una liga y amarras 3-2. "¿Se puede hacer más?- (Hace 2-1) -¿Eso es todo o todavía hay más?- (Quiere amarrar 1-2) *No.* -¿Cuántas barras tenemos?- (Cuenta) *1,2,3 barras.* -¿Y cuántas ligas?- *1,2,3.* -Cuenta bien-. *1,2, ah, solamente 2.* -¿Entonces, para 3 barras, cuántas ligas pusiste?- *1,2,3.* -¿De qué color?- *Blanco y rojo.* -¿Entonces?- *2* "Para 4 barras, construye bien las parejas:" ¿Cuántas barras?- (Cuenta) *1,2,3,4.* -¿Y cuántas ligas?- (Cuenta) *1,2,3.* -¿O sea, para 4 barras, cuántas ligas necesitamos?- *así, así, así. 1,2,3,4*". Con 5 barras, cuenta bien 4 ligas, pero concluye: "¡*La misma cosa* (el mismo número), *pues*!". Se le hace notar "*más barras.* -¿Y si añado uno más, habrá más barras o más ligas?- *Más barras y más ligas, como se quiere, ¿no?*- (se vuelve a tomar 5 barras). *-1,2,3,4,5.* -¿Y ligas?- *5 también.* -Mira. ¿Qué más hay?- *Barras.* -¿Por qué menos ligas?- *Porque puse demasiadas*". Para los tríos, se le hace nota que sólo se pone una liga alrededor de tres barras. "¿Y con una barra más?- *Una*

(liga) *más*. -¿Entonces, cuántas barras?- *4*. -¿Y ligas?- *4*". etc. Después de eso, se le hace recordar que para las parejas se reunían las barras "¿2 por 2?- *Sí, 2 por 2*.- Entonces, ¿se necesitaban más o menos ligas que con 3 por 3?- *Menos*. - Trata (se colocan 2 filas de barras para compararlas, una a dividir en parejas y la otra en tríos). Aquí, ¿vas a tomar más ligas o menos, o la misma cosa?- *La misma cosa. Tendré las mismas que allí, verde, azul y roja*. (mismo número). -Pero, ¿Algo es diferente?- *Sí, los dos que son diferentes*".[9] Hasta llega a mostrar que en las parejas 1-2 "*allí no hay barra* (entre las dos) *como en los tríos*, pero mantiene que para las ligas *se toma la misma*".

SAR (4;9) parece estar más adelantado con respecto a PAT porque, después de algunas constataciones admite que es necesario tener "*5 ligas para 6 barras*". Pero luego: "¿Qué es lo que siempre pasa? ¿La misma cosa de ligas y de barras?- *No más barras*. -¿Cuántos más?- *Muchos más*". Para los tríos, construye dos disyuntos con 6 barras, pero 2 correctos con 4 barras: "¿Cuántas ligas tomaste?- *2*. -¿Para?- *4 barras*. -¿Y si añado una?- *Una liga más*. -¿Entonces, cuántas ligas para 5 barras?- *4*."

NIC (5;2) observa 2 ligas para 3 barras, pero luego cree que se necesitan 4 ligas para 4 barras. Después de haber contado 3, dice una vez más que "*para 5 barras, se necesitan también 5 ligas*". Cuando se le pregunta por qué solamente 4, responde: "*porque las ligas son grandes*". Y sin embargo había comenzado por construir con 4 barras sólo parejas disyuntas. Cuando se pasa de 6 a 8 enseñando las 2 barras suplementarias, concluye que se necesitan 2 ligas suplementarias, y así prevé por lo que sigue "*2 más, 2 más, 2 más*". Pero, como SAR acaba por admitir 5 ligas para 6 barras. Para ver si entendió, se pasa a la tabla de control (tabla con intervalos irregulares): todo vuelve a ser lo mismo, es decir 3 ligas para 3 barras, 4 para 4, etc., con, de nuevo, necesidad de aprendizaje hasta 5 ligas para 6 barras "*porque las ligas son grandes no hay necesidad de poner más*". Se vuelve a la tabla inicial para pasar a los tríos: mismas dificultades hasta que admita sobre constataciones que se necesitan 3 ligas para 5 barras. Cuando ya parece que se ha aceptado la relación, se le pregunta: "¿Qué hacíamos hace un rato?- *Grupos de 2*. -¿Se necesitaban más o menos ligas que para los grupos de 3?- *Más para los grupos de 3*. ¿Por qué?- *Porque 3 es más que 2*".

CAL (5;11) y REN (5;3) tienen que ser mencionados porque habían sido interrogados con una técnica inicial sin ligas y en la cual, las parejas, etc., tenían que ser construidas a partir de pequeños cuadrados y no de barras fijadas en una tabla. El interés reside, en este caso, en que el sujeto demuestra una tendencia más fuerte a sólo formar parejas o conjuntos disyuntos, por ejemplo 1-2 y 3-4 para 4 elementos: "¿Otras parejas, más?- *No*". Sin embargo, se vuelve a encontrar esta idea constante, según la cual habrá un número igual de parejas o tríos que de elementos: 3 parejas para 3 cuadrados, 4 y hasta "muchas" para 4, 5 para 5, etc.; 3 tríos para 3 elementos, etc. Después de algunas observaciones, el sujeto llega sin embargo a la previsión n-1. "¿Y para las 5?- *5, no 4*", pero con tan poca comprensión que ambos sujetos anticipan 5 parejas para 4 cuadrados, o sea n + 1 y no n - 1.

Estas reacciones son muy interesantes desde el punto de vista de los inicios y las dificultades de la generalización. A partir del momento en que cada barra está en contacto con una liga, el niño parte de la idea preconcebida de que debe haber correspondencia de término a término entre unas y otras: idea falsa, pero razonable ya que

---

[9] De esta manera, hace dos predicados y no una relación.

esta estructura de correspondencia constituye, ya desde el nivel sensori-motor, una de las principales formas de coordinación de las acciones, puesto que su importancia aumenta en el nivel de las representaciones. Esta idea de correspondencia que se impone a nuestros sujetos, se debe, en tanto que forma, a abstracciones reflexionadas y a generalizaciones constructivas, muy anteriores a los razonamientos que elaboran a partir de nuestro dispositivo. ¿En qué consisten, entonces, los razonamientos actuales? Lo paradójico es que pretenden fundarse en observaciones uniformes y generalizar las observables a todas las situaciones presentadas, lo que constituye el tipo mismo de la generalización inductiva (a pesar de que su marco anterior sea como de costumbre y como lo acabamos de recordar, de origen constructivo). Pero estas observables son, en el presente caso, muy mal observadas y eso porque están inscritas en un marco previo que no es adecuado. Pero la paradoja reside precisamente en el hecho de que el sujeto no pretende de ninguna manera razonar a priori y que cree limitarse a decir lo que ve y a generalizar lo que sigue viendo o lo que seguirá viendo, actitud que se caracteriza esencialmente como inductiva.

Así es como PAT y NIC pasan el tiempo observando, pero únicamente cuando están enumerando explícitamente, que bastan 2 ligas para 3 barras relacionadas en parejas, 3 para 4, etc., y concluyen inmediatamente que se necesita un número igual: “la misma cosa, pues” (PAT). La razón de esta obstinación es que no entienden el por qué de n - 1 ligas (en el momento en que las cuentan): “porque puse demasiadas” (PAT) o “porque las ligas son más grandes” (NIC). Incluso SAR que, sin embargo reconoce de una manera que parece definitiva, que se necesitan menos ligas se limita a concluir que “hay mucho más” de éstas, sin ninguna regularidad. En cuanto al problema de los tríos, está todavía menos entendido, sobre todo que el sujeto empieza por construir solamente disyuntos, (lo que NIC, REN y CAL hacen todavía con las parejas). En fin, la comparación entre el número de ligas necesarias para las parejas y para los tríos, conduce a NIC a responder tan claramente: se necesita “más para los grupos de 3, porque 3 es más que 2”, en otras palabras porque hay un número igual de ligas y de barras. En resumen, ninguno de nuestros problemas ha sido aún resuelto a este nivel.

§/2 -EL NIVEL IB- Sólo notaremos en los próximos sujetos un progreso sensible con respecto a los anteriores, en el sentido en que admiten que para n barras habrá n - x ligas, pero con generalización inductiva hasta cierto n solamente:

DUP (5;8) observa 2 ligas para 3 barras y 3 para 4, pero todavía necesita contar 4 ligas para 5 barras: "¿Y si añado 1 (o sea 6?- *5*. -¿Cómo lo supiste?- *Lo adiviné*. -Y ¿para 7?- *7*. -¿Por qué?- *Porque hay 7 barras*". Después de haber constatado 6, prevé bien 7 para 8 barras, pero para 10 barras vacila: "*8 ligas*. -¿Por qué?- *porque después del 9 es 8, no después de 7 es 8*", lo que sin duda constituye una adición de 1 liga a 7 para una adición de 2 barras a 8. Cuenta: "*No, 9*. -¿Y para 12 barras?- *10* (Lo hace y constata 9)". Se resume, con constataciones: 2 ligas para 3; 3 para 4; 4 para 5; 6 para 7, pero (esta vez por anticipación) 10 para 12 barras. Tríos: los construye bien y constata 2 ligas para 4 barras y 3 para 5, pero para 6 y 7, etc., barras prevé 5 y 6 ligas, como para las parejas. Después de varias tentativas y constataciones, se le pregunta a DUP la diferencia entre 2 en 2 y 3 en 3: "*No es diferente*" y vuelve a n - 1 para los tríos.

SAN (6;4) constata n - 1 ligas para las parejas hasta 6. Para 7 y 8 barras contesta, limitándose a contar las parejas que podría formar (pero no las construye). En cambio, para 10 barras, prevé 12: "¿Más o menos que 10?- *Quizá más ligas o quizá más barras, no, no lo puedo saber*". Para los tríos, buenas constataciones hasta 7 barras, pero luego "*9 ligas para 10 barras*" y 12 para 10.

FLO (6;8) constata n - 1 hasta 5 y lo recuerda bien, pero prevé 6 para 6 y 10 para 10: "*Tiene que ser la misma cosa que barras*". Vuelve a enunciar los n - 1 del principio cuando se repite más tarde, pero para 10 y 12, vuelve a decir "*el mismo número*". Se le pregunta por qué: "*No sé, es un poco complicado*". Asimismo, después de constataciones sobre los tríos "no sabe" si se necesitan más o menos ligas para 3 o para 2 elementos.

Vemos que son pocos los progresos realizados entre el nivel IA y IB. El más sensible es el de FLO quien, después de constatación de n - 1 ligas para n barras hasta 4 para 5 prevé posteriormente la repetición de esos números que no ha olvidado, mientras que los sujetos del nivel IA los rechazan inmediatamente, pero ella vuelve a caer en la falsa "bijection" a partir del conjunto de 6 barras. En cambio, DUP y SAN llega hasta generalizar a 6 u 8 barras la ley n - 1, observada para los primeros números. Estamos aquí en presencia de una generalización inductiva acerca de una observable correcta y ya no falsa como en el nivel IA. Pero esta extensión a nuevos números sigue siendo muy modesta puesto que DUP vuelve a la errónea correspondencia a partir de 7 barras (y se confunde posteriormente) y SAN llega hasta 12 ligas para 10 barras. Por otra parte, estos sujetos no encuentran "diferencia" entre el número de ligas necesarias para parejas y para tríos, y a pesar de las observaciones, FLO no llega a decidirse.

§/3 -EL NIVEL IIA- Este subestadio marca los progresos de la generalización inductiva y el paso a los principios de la generalización constructiva. He aquí algunos ejemplos que empiezan por un caso intermedio entre IB y IIA:

MIL (7;8) construye inmediatamente dos parejas con 3 barras y prevé 3 ligas para 4 barras. "¿Cómo sabes?- *Porque* (añade la pareja 3-4 a 1-2 y 2-3 ya hechas). -¿Y si añado

1 barra (5)?- *4*. -¿Tendremos 5 barras y 4 ligas?- *Ah, no* (la falta de correspondencia término con término lo asusta cuando viene expresada verbalmente). -¿Cuántas?- *5* (luego cuenta mentalmente). *No, 4*. -¿Qué fue lo que contaste?-... Con 7 barras (¿ocultamos)?- *6*. -¿Cómo lo sabes?- *4-5, 5-6, 6-7, y ya había 3 (hasta 4)*. -¿Y con 12 barras?- *11*. -¿Qué fue lo que contaste?- (Enseña los intervalos). *Allí en medio*. -¿Y si en vez de 12 tuvieramos 15 (sin las barras)?- (vacilación) *15*. -¿Cuándo tenías 3 barras?- *2 ligas*. -¿Y 4?- *3*. -¿Y con 6?- *Ya no sé (cuenta). 5* -¿Y con 8?-... -¿Puedes encontrar sin contar?- *No*." Etc. "Y, ¿con 10?- *No puedo... 8 no, 11; no, 9*. -¿Estás seguro?- *Sí, quería el número antes de 10*. -¿Y con 15?- *14*". Entonces, enuncia la relación regular: "*Hay* (siempre) *más barras*", pero no sabe explicar por qué. Sin embargo, la referencia de sus cuentas por intervalos le hace entender que, en una figura cerrada como un rectángulo o un círculo, habría un número igual de parejas y de barras. En cambio, los tríos lo confunden a pesar de las observaciones: "*ya no entiendo nada*".

THY (7;9) encuentra rápidamente la ley n - 1 hasta 5 barras, pero para 9, supone primero 6, luego cuenta mentalmente 1-2, 2-3, ... 7-8, 8-9: "*Son más, son 8*. -¿Y para 12?- *11, porque siempre hay una menos*. -¿Y por qué eso?- *Porque se pone en medio* (enseña el intervalo) *y luego hay más barras... tomo 2 barras para poner 1 liga*". En cambio, para los tríos, observa 2 asociaciones para 4 elementos, pero generaliza erróneamente a 2 para 5 (descuido de la ley 2, a pesar de que las leyes 1 y 2 hayan sido entendidas para las parejas). "¿Todavía 2?- *O 3, no sé*", luego prevé correctamente 4 para 6, pero no vuelve a generalizar y anticipa 8 ligas para 9 barras, "*porque siempre hay 1 menos* (como si se tratara de parejas). -¿Y de 3 en 3, crees que hay 1 menos?- *Sí* (control) *Ah, no 2 menos*". Posteriormente, se acerca al nivel IIB: "*Siempre 2 menos* -(¿Por qué?)- *Hay más barras juntas, entonces menos ligas*". Pero cuando se pasa a los cuádruplos, THY prevé 4 para 9 como si de los tríos a los cuádruplos se pasara de n - 2 a n - 5, "¿De 2 en 2, cuántas serían?- (Cuenta los intervalos) *8*. (justo). -Y ¿de 3 en 3?- *13* (contando al azar). ¿Y de 4 en 4?- *Menos ligas, solamente 4, menos...*"

XEN (7;1) También encuentra inmediatamente la ley n - 1 hasta 6. Alguna vacilación para 8, luego: "*7. Lo veía así, así, así, así* (gesto para rodear cada pareja)". Asimismo 11 para 12: "*Porque la liga rodea a las (2) barras*". Pero para 15 (no dadas) "*es un poco difícil, porque las 15 barras no están* (enseña la tabla) *14*". (Siguió las parejas con la base 12 y luego contó mentalmente los últimos). Encuentra 19 para 20 y 29 para 30, pero enunciando los números en voz alta. "¿Y para 100?- *Eso es difícil, espérenme, no puedo... 49* -¿Y para 25?- *14*". Para los tríos, se adapta gracias a múltiples vacilaciones pero ni siquiera encuentra un principio de explicación: para las parejas, entre las dos barras hay "*una sola liga*", mientras que para los tríos "*no es una liga solamente porque hay 1 barra* (entre los extremos), entonces son bastante, mucho más". Pero para los cuádruplos, dice: "¿Con 12 barras, cuántas parejas pudiste hacer?- *11*. -¿Y para los grupos de 3?- *11*. ¿Igual que para los grupos de 2?- *No, 10*. -¿Y para los grupos de 4?- *8*. -¿Por qué?- *Euh; 7*. -¿Por qué- *Porque hay 12 barras*".

MON (8;0) encuentra la ley n - 1 "*porque se toma 2 barras a la vez, entonces son menos ligas*", y entiende que en círculo, tendríamos 12 = 12. Para los tríos, no prevé regla: observa el hecho para 4 y generaliza para 5, pero también prevé 3 para 6 y posteriormente caía tanto en n - 2, como en n - 3. En cambio, entiende que con las parejas se necesitan más ligas que con los tríos "*porque 3 es más que 2*".

BER (8;4), mismas reacciones para las parejas (con fijaciones iniciales sobre los intervalos). Para 23 barras habrá 22 ligas "*porque siempre hay una menos*". Para los

tríos, dice, para 4 elementos, "*1, no, 2 ligas porque hago así* (procede a sus acciones)". Pero para 10, vuelve a caer a 9 (n - 1) a pesar de que está bien atenta a su construcción. Fracaso con los cuádruplos.

Estas reacciones del nivel IIA son reveladoras en cuanto al paso de las formas inductivas a las constructivas de la generalización. En efecto, por un lado parece bastante claro que los sujetos acceden ya, en algunos momentos, a estos tipos de razonamiento superior, y eso no en la medida en que descubren casos particulares de la ley n - z, porque este principio de generalización puede seguir siendo inductivo, sino cuando empiezan a adivinar la razón: cuando MIL cuenta los intervalos para darse una idea del número de ligas en el caso de las parejas; cuando THY más explícitamente dice: "hay más barras (porque) tomo 2 barras para poner una liga", e incluso entiende para los tríos: "hay más barras amarradas, entonces menos ligas"; cuando XEN dice cosas semejantes ("La liga rodea 2 barras"); y cuando MEN afirma "porque se toma 2 barras a la vez", o sea una afirmación que ya justifica la ley n - z y que no se limita a enunciarla. Además, se ve que las explicaciones equivalen a destacar algunos aspectos de la acción propia, en su construción material de las parejas y de los tríos, y así podemos deducir desde ahora que la formación de la generalización constructiva consistirá precisamente en una transposición de esta construcción material a una construcción conceptual.

Pero, por otro lado, y en eso reside el interés de esos casos, estos mismos sujetos resultan ser incapaces de explotar este buen principio. MIL, que sabe establecer la relación entre ligas e intervalos, se asusta cuando se concluye que ya no corresponden a las barras y "ya no entiende nada" para los tríos, a pesar de que sabe construirlos: después de cierto número, hasta se confunde con las parejas. THY ya vacila para las parejas a partir de 9 y su vacilación es mayor para los tríos. XEN declara que es difícil razonar cuando no se ven las barras y sus deducciones finales son cada vez peores. MON y BER reaccionan de la misma manera para los tríos, incluso cuando logran sus construcciones.

Allí hay una paradoja porque, a ratos, estos sujetos logran un principio de generalización constructiva, mientras en otros casos, se limitan a generalizaciones inductivas, mediante una simple utilización de las observaciones que, finalmente, ni les sirven para encontrar extensiones correctas. Pero, esta situación, a primera vista extraña, se explica fácilmente por las leyes de la abstracción y de la toma de consciencia. Es preciso distinguir por lo menos tres niveles en los datos de la acción propia, incluyendo todas las transiciones entre ellos. Primero, partiendo de la periferia (pero la toma de consciencia

procede precisamente desde la periferia hasta el centro[10]), se dan los resultados exteriores a la acción que pueden ser conocidos por el sujeto sin que éste entienda cómo los ha logrado: por ejemplo, MON, en el caso de los tríos para 10 barras, mira con atención su propia construcción, pero no se da cuenta de la manera en que ha procedido. En segundo lugar, se da la acción en su desarrollo material y el hecho de tomar conocimiento se sitúa todavía, como en el caso de los resultados exteriores, a nivel de la abstracción empírica (refiriéndose a los desplazamientos, las manipulaciones como tales,...) En fin, se da la comprensión del mecanismo interno de la acción, es decir de sus coordinaciones necesarias (origen de las operaciones lógico-matemáticas) y la toma de conciencia de esta lógica praxeológica se debe entonces a la abstracción reflexionada.

Por tanto, no hay nada contradictorio en las reacciones de nuestros sujetos. Cuando se complica la acción (número de barras, importancia de las divisiones, etc.), logran ejecutarla poco a poco, pero sólo perciben claramente el resultado, aunque deformado cuando intervienen los factores descritos en el estadio I. Por tanto, sólo se dan, a partir de estas observaciones, correctas o no, generalizaciones inductivas, por falta de abstracción reflexionada y por falta de toma de conciencia del mecanismo coordinador interno que permitió la realización de las acciones.

En la medida en que la acción es más sencilla (primeras parejas), el sujeto puede lograr observar las etapas y recordar posteriormente las grandes líneas, pero limitándose todavía a seguir sus manipulaciones que considera como hechos. Tales observaciones (segundo nivel) no implican todavía, salvo en algunos casos aislados, las coordinaciones internas (tercer nivel) cuya sola necesidad intrínseca hubiera permitido la generalización constructiva, no bajo las formas incoactivas y momentáneas que se observan a este nivel IIA, sino generales y recurrentes, permitiendo encontrar la ley n - 1 para todos los números y pasar de n - 1 a n - 2 (tríos), a n - 3, etc. En pocas palabras, los sujetos de este nivel ya logran tomar parcialmente conciencia de sus construcciones progresivas, pero aún no destacan el esquema generalizador como esquema de coordinaciones necesarias.

§/4 -EL NIVEL IIB- Lo que caracteriza este nuevo subestadio es el descubrimiento progresivo de este esquema, pero dicho descubrimiento sigue siendo progresivo porque todavía encontramos muchas huellas de generalización inductiva fundada en las observables, los cuales sirven para esbozar una generalización constructiva poco

[10] Ver nuestra obra acerca de: "*La prise de conscience*", PUF, 1973.

segura. A este respecto, el paso de la regla n - 1 de las parejas a la regla n - 2 de los tríos, es importante porque si la ley de las parejas puede fundarse en la sola observación (intervalos, etc.) con generalizaciones inductivas, el esquema de construcción es más difícil de destacar en el caso de los tríos y a fortiori de los conjuntos siguientes, para poder asegurar su regularidad, ya que las intersecciones son cada vez más grandes:

ERI (8;7) encuentra inmediatamente la ley de las parejas y una explicación: "*Porque éste cuenta para dos, entonces, siempre habrá una liga menos*". Para los tríos, los construye para 4 y 5 elementos y luego concluye que si se añaden 2 y luego 10 barras, habrá que añadir 2 y luego 10 (2a. ley) "*porque a partir del momento en que se añade una barra, se puede hacer otro conjunto* (de 3)". Pero para 7, vuelve a caer en la ley n-1 y se da cuenta de su error: "*No, la ley es otra porque para los conjuntos de 2, siempre se tomaba el que seguía y ahora se toma* (su sucesor). -¿Entonces? -Siempre *(n)-2*". Le hacemos recordar lo anterior y: "¿Con los grupos de 4, cuál sería la ley? *Siempre habría 3 ligas menos: cada vez que se aumenta hay 1 barra para las familias* (grupos de 2, 3, 4...), *siempre había 1 liga menos*. -¿Qué hay de menos? -*Un conjunto (1a. ley)* -¿Y para los grupos de 6? -*5 menos* (correcto)". Para los grupos de 10, en un primer momento se equivoca: "(Cuenta) *10 menos*", luego después de repetir para 2 y 5, "*9, un número abajo del grupo*". -¿Y para grupos de 20? -*19 ligas menos*". Pero no logra decir que para grupos de 20, tendremos en 25 (o sea 25-19 6): *2, no 3*", a pesar de que entienda que con 8 barras tendremos 5 grupos de 4, etc.

VIN (8;7) Muestra las mismas reacciones hasta la última pregunta acerca de la 3a. ley: "*Siempre hay una menos*. -Por ejemplo, ¿cuántas ligas menos para los grupos de 5? -*4 menos*. -¿Y un grupo de 25? -*Espere... 24 menos*. -¿Menos que qué? -*Menos ligas que barras, pero no se sabe cuántas barras hay*. -¿Para hacer grupos de 25, cuántas barras necesitarías? -*Por lo menos 100 o algo así*. -¿No menos? -*50, sí, serían dos grupos*. -¿2? -*No, más. Ah, se podrían hacer 26*. -¿Y con 26 barras, cuántos grupos de 25? -*Serían dos grupos*".

KAL (9;5) encuentra inmediatamente la ley de las parejas, "¿Para 12? -*11 ligas*. -¿Por qué? -*Empieza por una barra y se acaba por una barra, no por una liga*". Tríos: observa n-2 con 3, 4 y 6 pero "*no sé si funcionará siempre*". Averigua para 7 y concluye: "*es porque las ligas ahora toman más espacio*". Para los cuádruplos, construye 2 con 5 elementos y concluye inmediatamente que con 8 barras habrá 5: "¿Cómo lo pensaste? -*Se añade 1* (grupo de 4) *por barra*. -¿Y de otro modo?- *Bastaría restar 3 es el número más grande que viene antes... porque hay 3 barras más que ligas.*" Se hace respetar las reglas para 2, 3 y 4: "*Cada vez que se añade 1 en un grupo, se resta 1 del número de ligas...* -¿Y cuando teníamos cada vez más barras? -*Eso no cambia*. -¿Es sólo cuando se cambia de grupo? -*Sí*. -¿Y para un grupo más grande, tenemos más o menos ligas? -*Menos*".

DAN (10;0) después de las parejas, encuentra también la ley n-2 de los tríos "*porque siempre están dentro*" (elemento del medio). Hace todo eso mirando, 4, 5, luego 6 barras sin manipularlas, luego encuentra 6 para 8 por simple representación. Posteriormente deduce que podrá hacer 3 grupos de 4 con 6 barras: "*Antes quitaba 2 y ahora 3 porque es un grupo de 4*. -¿Y con 7 barras, cuántos grupos de 6? -*2*. -¿Por qué? -*Antes teníamos 3* (para 4). *Más 2 son 5 y 7 menos 5 son 2*". Después de eso se confunde para 25 barras a

dividir en grupos de 20, calcula en vez de generalizar y encuentra 16, luego solamente 2, y luego 5. Pero al recapitular de 2 a 5, enuncia la ley 3: "*Siempre hay que quitar uno de más.* -¿Entonces, para los grupos de 15? -*Pues, 14.* -¿Y para 20 barras, cuántos grupos de 15? -*19... No, 6 grupos*".

El notorio progreso realizado por estos sujetos con respecto a los del nivel IIA (con diversos casos intermedios que es inútil mencionar) reside en su rápida comprensión justificada de la ley n-2 de los tríos después de las construcciones, y en la facilidad con la cual pasan de esta ley a la ley n-1 de los cuádruplos y de conjuntos más grandes. Pero es obvio que este mejoramiento de la generalización constructiva se debe al hecho de que ya no se limitan a una lectura de los resultados de la acción o de las manipulaciones materiales que intervienen en esta construcción de tríos (KAL empieza todavía de esta manera, pero concluye con razón: "No sé si eso funcionará siempre"), sino que logran entender el esquema mismo de esta construcción, es decir las coordinaciones que dan las "razones". Esto es ya en parte el caso (y solamente al final) de algunos sujetos del nivel IIA, como XEN y THY, pero la relación invocada todavía no es cuantificada numéricamente ("son bastante, mucho más"), mientras que en el nivel IIB, el niño entiende por qué se pasa de n-1 a n-2 ("es otra ley" etc, dice ERI: cf. también KAL y DAN) y sobre todo define inmediatamente el paso recurrente a los cuádruplos y a los conjuntos siguientes, lo que constituye sin duda el signo de una nueva comprensión. Pero los límites de este nivel se deben a cierta vacilación que sigue existiendo en las deducciones acerca de los números superiores a 20. Si llamamos n el número de barras considerado, por ejemplo 50, y N, el de los elementos de un conjunto, por ejemplo 25, el número x de ligas a restar (es decir restando de los conjuntos) es siempre de N-1, o sea en el presente caso de 24, y el número de los conjuntos posibles es de n-x, o sea 26. Pero, vemos a ERI, VIN (en un momento dado) y DIN confundirse por no distinguir N y n, o sea por no saber deducir n-x de la substracción N-1, que sin embargo había sido bien entendida. Eso es tan sólo un indicio de coordinaciones no suficientemente dominadas, pero es útil mencionarlo para mostrar que existe una amplia gama de intermediarios entre la representación del esquema completo de la construcción (3er. nivel de la toma de conciencia: cf. # 3) y la simple lectura o reconstitución de los resultados de la acción (1er. nivel) o de sus manipulaciones materiales (2o. nivel).

§/5- EL ESTADIO III- Es obvio que al nivel de las operaciones formales para las cuales se mejoran todas las deducciones, los

sujetos lograrán fundar sus razonamientos en el esquema de construcciones, destacando de éste las coordinaciones necesarias. Es interesante notar que la ley n-2 de los tríos puede ser ahora encontrada sin observaciones previas, sino gracias a una simple inferencia a partir de la ley n-1 de las parejas. En cuanto a las deducciones acerca de N y n, por supuesto encontramos todavía casos de indeterminación, pero por lo general el problema está dominado:

NAT (11;2): "¿Con 12 barras, puedes decirme cuántos grupos de 2, sin contar? *11, porque se pone uno menos.* -¿Por qué? -*Porque hay 12 y no se puede relacionar las dos extremidades*", de allí la comprensión de que tratándose de un círculo, serían 12. -"¿Y con 125? -*Serían 124*". Tríos para 4 elementos (tapándolos): "*2.* -¿Y con 6 barras? -*4.* -¿Cómo sabes? -*Porque con 3 barras se hace así (1, 2, 3, etc.)* -¿Y con 12 barras? -*10, siempre resto 2.* -¿Y 7? -*5 porque se salta uno* (entre 1 y 3)". Quíntuplos (sin pasar por los cuádruplos): "-¿Y grupos de 5 con esas 7 barras? *3* (cálculo mental) -Hicimos grupos de 2, de 3, de 5, ¿hubéramos podido de 4? -*Tendría 4* (con esas 7) -¿Como podrías explicar lo que pasa con esas cosas? -*Más grandes son los grupos, más son, y más tienen menos.* -¿Cuántos menos? -*Cada vez que hago un grupo más grande de unas barras (N) tengo un grupo menos* (ley) -Entonces, si aumento de 1 en los grupos, ¿qué es lo que disminuyo? -*El número de los grupos*".

KIN (11;5) Tríos: comprensión inmediata: "¿Con 10 elementos, cuántos grupos de 3? *8.* -¿Y con 12? -*Habrá 10. Cada vez que se añade una barra* (en n) tenemos un grupo más (ley 2). -¿Pero por qué 2 grupos de 3 con 4, etc.? -*Porque se utilizó la misma barra, siempre son 2 menos. Creo que cada vez que se aumenta el número de las barras* (en N, no en n)... *no puedo explicármelo.* -¿Cuántos menos? -*Sí, cada vez que se añade una barra* (en N) *se disminuye de 1* (ley N-1). -¿Y para grupos de 25 sobre cualquier número? -*24.* -¿Por qué? -*Hice el mismo razonamiento.* -¿Cuántos grupos de 20 se podría hacer con 25 barras? -*15... no, es demasiado... son 5, no 6: son* (el primero) *20, luego 21, 22, 23, 24, 25, son 6*".

DIA (12;2). Tríos: n-2 "*porque cada vez salto una barra, entonces son 2 menos*". Cuádruples: aún tiene que sacar cuenta. "¿Y para 20 barras?- *19 menos.* -¿Cuántos grupos de 20 con 28 barras? -*Puedo hacer 5, porque cada vez que muevo una barra necesito una liga* (pero parte de 21, luego corrige) *Son 6*, -¿Puedes explicarme por qué? -*Porque cada vez que hago otro grupo* (de N) *disminuyo de una barra*".

FLU (15;2) concluye espontáneamente como KIN que si se resta 2 para los tríos "*pues, serán 3 menos para los grupos de 4*". -¿Y de 5? -*Pues, 4 menos.* -¿Por qué? -*Siempre se toma (1 de más) del grupo anterior: si es una pareja se toma el último, si es un trío se toma los dos últimos y así siempre... se aumenta el intervalo* (n-x). -¿Con 25 barras, cuántos grupos de 20? -*5, creo.* -¿Seguro? -*Si hago un grupo de 20 quedan 5 posibilidades* (como KIN) -Piénsalo bien. -*Ah no, hay el primer grupo, entonces son 6.* -¿Cuál sería el intervalo en este caso? -*Se tiene uno que fundar en lo que se dijo antes y después se deduce: creo 19*". Pero para los grupos de 20 en 200 barras, vacila bastante: 101, luego 10 ó 12, luego 180 y en fin 181 (200-19).

Estos sujetos se fundan de manera constante en el esquema mismo de sus acciones, lo que les permite a la vez las anticipaciones

por construcción mental o representativa que se sustituyen a las manipulaciones materiales, al mismo tiempo que la explicación de las coordinaciones necesarias proporcionan las razones. Es preciso subrayar que para los números relativamente grandes, prefieren calcular el número de los conjuntos posibles procediendo por la vía positiva ascendiente (20, luego 21, 22, 23, etc.), más bien que por la vía negativa o descendiente de la substracción, como lo logra FLU (y DIA implícitamente al final). A este respecto, se podría distinguir un nivel IIIA cuando el sujeto se queda en el primero de estos procedimientos y un nivel IIIB cuando logra el segundo.

§/6- CONCLUSIONES- Los resultados anteriores ofrecen un magnífico ejemplo de transformación continua de la generalización: primero, inductiva, muy incompleta (e incluso deformada por ideas preconcebidas y origen constructivo anterior), luego un poco más completa para volverse generalización constructiva en la medida en que el sujeto, partiendo de las solas observaciones proporcionadas por los resultados de sus acciones, remonta con eso a la sucesión de sus manipulaciones materiales y finalmente a su esquema mismo, considerando como sistema de coordinaciones necesarias. El segundo de estos tres niveles interviene cuando el sujeto no se limita a analizar a posteriori el resultado de sus acciones, sino cuando puede reconstruirlas, e incluso reemplazarlas por un cálculo mental, es decir por una evocación representativa. En cuanto a las coordinaciones necesarias, su eficacia se manifiesta por el descubrimiento de "razones" atribuidas a las relaciones regulares, ya que éstas constituyen el criterio auténtico de las generalizaciones ahora constructivas.

Pero no habría que descuidar un aspecto importante de esta evolución: las acciones del sujeto, cuya toma de conciencia condiciona de esta manera los progresos de la generalización, evolucionan a su vez de un nivel a otro. Por ejemplo, la formación de los tríos e incluso de las parejas (PEN y CAL en IA) se inicia con fracasos debidos a la necesidad de limitarse a conjuntos disyuntos y las intersecciones sólo se mejoran a medida en que van avanzando las etapas. Pero, como la toma de conciencia de la acción consiste en una conceptualización, es normal que ésta reaccione posteriormente sobre la primera, de tal modo que si las acciones resultan ser adelantadas con respecto al razonamiento, éste último puede servir más tarde para la programación de las nuevas acciones cuya realización sigue siendo, sin embargo, indispensable durante un período in-

termedio, a modo de control o simplemente de apoyo (abstracción empírica).

Ahora, lo que nos queda por examinar es la cuestión de saber cómo la generalización constructiva, cuyo origen se encuentra en la conceptualización de los esquemas de construcción propios de la acción misma, acaba por tomar estas formas de recurrencia tan claras desde sus principios, durante el estadio II (y sobre todo IIB) y adquiriendo sus formulaciones más generales durante el ESTADIO III. En realidad, toda generalización constructiva se funda paradójicamente, no sólo en las construcciones operacionales actuales, o ya realizadas, sino también sobre aquellas que seguirán y sólo se encuentran, en el momento considerado, en un proceso de devenir sin haber sido realizadas. La razón reside en el hecho de que toda construcción abre nuevas posibilidades y que éstas intervienen tan pronto se vuelven realizables, de la misma manera que un trabajo virtual todavía no comprensado y que, por consiguiente, debe serlo tarde o temprano. Pero, el razonamiento recurrente (o "inducción completa" como lo llamaba Poincaré) constituye precisamente el patrón por excelencia de estas construcciones fundándose en las posteriores. Si se averigua una propiedad en el caso del primer número y si, siendo cierta para n, lo es necesariamente para n-1, entonces lo será para *todos* los números: en esta formulación, está claro que el momento decisivo no es el control sobre 0 ó 1, o sobre n, sino precisamente, el paso de n a n-1, lo que proporciona, retroactivamente, la razón de lo anterior. En nuestros resultados, vemos que en el nivel IIA la ley n-1 de las parejas sólo se entiende a partir de las observaciones, por falta de paso posible a la ley n-2 de los tríos, mientras que en el nivel IIIB, esta última regla está asimilada y conduce inmediatamente a la ley n-3 de los cuádruplos; de tal modo que parece que la posibilidad de este paso de n-2 a n-3 es la que permite la comprensión de n-2, concebida a posteriori como la generalización de n-1, sin que haya habido una generalización directa de n-1 a n-2 que no iría más allá. En efecto, el proceso recurrente central que conduce de un número al siguiente, sólo otorga a la deducción un carácter de necesidad en la medida en que le proporciona la razón, y eso es precisamente lo que empezamos a ver en el nivel IIB y que aparece explícitamente en el estadio III.

En otros términos, se pueden distinguir dos fases en la formación de los razonamientos recurrentes. Durante la primera, la propiedad en juego está observada por uno o dos números N: n-1 con trabajo para las parejas en el nivel IB, n-2 con trabajo también para los tríos en IIA. En esos casos, la verdad en juego se descubre a

partir de observaciones y la razón que se le encuentra sigue siendo local (intervalos para las parejas) o incompleta ("Más barras" sin cuantificación para los tríos); por tanto, la generalización sólo puede ser inductiva[11], es decir sin necesidad: "No sé si funcionará siempre" dice por ejemplo KAL a pesar de tres observaciones para n distintos. En cambio, la segunda fase se inicia cuando, frente a un n-x el sujeto ya no se limita a razonar sobre lo que ha observado, sino que siente la necesidad de pensar en lo que sigue, como si eso sólo le pudiera explicar las constataciones anteriores: por ejemplo KIN y FLU (estadio III), con respecto a los tríos, imaginan espontáneamente el caso de cuádruplos. Ese es el paso de N a N + 1 que se vuelve explicativo y es esa necesidad ligada a las construcciones anteriores, es decir a un "todo" virtual, la que caracteriza la recurrencia y una forma nueva de generalización que, así, se vuelve constructiva, porque siempre abierta a los posibles futuros.

[11] Pero en el sentido ordinario y no en el de la inducción "completa".

CAPITULO IV
UN RAZONAMIENTO RECURRENTE ACERCA DE LOS POLÍGONOS INSCRITOS

con J. Vauclair

¿Se puede construir, en varios polígonos convexos, triángulos o cuadriláteros, etc.., haciendo coincidir dos lados del triángulo con dos lados adyacentes del polígono (o tres lados para los cuadriláteros)? Este sería el problema estudiado en este capítulo: por consiguiente, se tratará de descubrir la correspondencia regular entre el número de triángulos, etc., posibles (estas figuras inscritas son entonces no disyuntas) y el de los lados o de los ángulos del polígono encubridor y la explicación recurrente de esta ley.

El material consiste en una tabla provista de muchos hoyos en los cuales se pueden colocar, verticalmente, unas barras de hierro. El polígono inicial está marcado por una liga ancha, y ligas más pequeñas, de varios colores, sirven para las construcciones. Se coloca frente a cada barra unas chinches marcadas con una letra, según el orden A, B, C...

Por lo general, se empieza con un pentágono y se pide construir todos los triángulos posibles, precisando bien la condición de hacer coincidir dos de sus lados con dos lados adyacentes del polígono inicial. Para cada fase de la interrogación, se pide una anticipación, una construcción y una explicación. Ya hecha la construcción, se desplaza uno o dos vértices del polígono encubridor, de manera a aumentar su perímetro y su superficie, y se vuelven a plantear las mismas preguntas (lo que da lugar a resultados instructivos en los jóvenes sujetos). Luego, se vuelve al polígono inicial y se procede de la misma manera para la construcción de los cuadriláteros (precisando de nuevo la condición de los lados adyacentes).

Una vez terminada la construcción de los triángulos y de los cuadriláteros, se propone un hexágono para el cual se pide la previsión de los números totales y, en su caso, las construcciones. Luego se pasa, mediante simples previsiones, a polígonos cualesquiera y a la inscripción de otras figuras que no sean triángulos ni cuadriláteros.[12]

§/1- EL NIVEL IA- De 5;1 a 6;5 aproximadamente, no se da ninguna anticipación del número de los triángulos posibles, y menos de los cuadriláteros, a pesar de que el sujeto sepa construir algunos de los primeros después de un ejemplo dado al principio:

---

[12] Los designaremos por las letras T y Q en los análisis de los casos individuales.

CRI (5;1). Se le enseña ABE en un pentágono: hace BCD (sin intersección con "Trata otro. *ABDE*. -¿Cuántos lados? -*4*. -Haz un T. -(ABE). -Ya está hecho, otro. -*BDE* (no conforme con la condición, pero es la única superficie que queda). -¿Y otro? -*Ya hay muchos*. -Trata de todas formas. -(Rehace ABE y luego abandona)". Se le sugiere los siguientes y se le hace sacar la cuenta: cuenta 1, 2, 3, 4. "Por qué pudiste meter 4? -*Porque todavía había lugar*". Se presenta un gran cuadrilátero ABCD y se pregunta: "¿Puedes hacer unos T? - *No, porque no se pudo como los T*. -Trata. -(Hace ABD). -(Otro). -(BCD el complemento, o sea disyunto). -Trata otra vez. -(Vuelve a hacer BCD y ya no ve otros)". Se le sugiere los 2 otros y se le pregunta: "¿Por qué 4? - *Porque se puso allí y allí* (los suyos) *y allí y allí* (los sugeridos). -(Se aumenta B) ¿cuántos T? -*Todavía más, porque se hizo más grande* (la superficie total). -Trata. -(Vuelve a encontrar los 4), *pero ¿cómo hacer para poner más ligas?* -¿Cuántas pusiste? -*4, pero para hacer más T ya no hay lugar para hacer más. Puedo poner unos más por encima*". Los reconstruye y se le hace notar que de nuevo son 4, luego se aumenta todavía más la superficie angular en B: "*Podría poner más que 4*. -¿Por qué? -*Porque se hizo más grande, entonces se puede poner más T*. -Trata. -(Hace 4 y duplica el último). -Se corrige. ¿Cuántos? -*4*. -¿Y tú qué pensabas?- *5*". Se aumenta D y de nuevo quiere más que 4 y explica el fracaso "*porque ya se pasó en todos los hoyos*". Se disminuye mucho el cuadrilátero: "*Sólo se podrá hacer 1 T, porque se hizo más chico*. -¿Cambió la forma? -*Sí*".

ISA (6;5). Se empieza por un hexágono y construye 3 T no disyuntos pero según una sucesión directa y sólo ve los demás después de habérselos sugerido. Cuenta los 6 pero piensa que habrá más cuando se aumenta la figura en A: "*De nuevo 6*. -(Se aumenta en D). ¿Cuántos habrá?-... -¿Se puede saber o no?- *No*. -¿Aproximadamente? -*7* (tentativas). -¿Entonces, cuántos son? -*6*. -¿Y antes, cómo lo puedes explicar?- *6 y 6*. -¿Siempre serán 6 con eso? -*No*". Se construye un rectángulo: "¿Cuántos T? -(Los construye y luego los cuenta) *4*. -¿Cuántos lados tiene esta figura?- *4*. -¿Y así (se transforma el rectángulo en trapecio)? -(Construye 4 T pero trata de obtener más) -*4*. -¿Y antes en la figura (hexágono)? -*6*. -¿Por qué más que aquí?-... -¿Tienes una idea? -*No*. -(Se transforma el trapecio en pentágono) ¿Cuántos pedazos derechos (lados)? -*5*. -¿Cuántos T serán? -*No se sabe*".

Los sujetos de este nivel IA, interrogados acerca de la recurrencia numérica (Cap. III) realizaban falsas generalizaciones inductivas a causa de una idea preconcebida que es la de la correspondencia n con n (cuando hubiera tenido que ser n-1, etc.), puesto que esta razón de ser de la correspondencia término con término se debía asimismo a generalizaciones constructivas anteriores. En el presente caso, se vuelve a encontrar un fenómeno similar, pero de naturaleza espacial, cuando precisamente esperamos una correspondencia n con n entre los triángulos y los vértices del polígono. La idea preconcebida consiste, aquí, en el hecho de que una superficie se divide en más partes disyuntas si es más grande: idea debida a generalizaciones constructivas correctas, pero anteriores a los datos presentados e inadecuadas ya que los triángulos tienen partes comunes (su intersección se vuelve necesaria si se aplica

correctamente la condición exigida) y que su número no depende de sus formas ni de su tamaño.

Además, una primera tendencia general de los sujetos de este nivel consiste en limitarse a triángulos disyuntos como lo hace CRI (ISA procede relacionando sucesivamente 4 lados adyacentes del hexágono y sin duda no se da cuenta de las intersecciones, sino que continuaría por sí sola hasta 6): este principio inicial de las partes disyuntas corresponde ciertamente al de las clases disyuntas tan problemáticas a este nivel (Cap. I). Es preciso notar, además, que otras condiciones restrictivas frecuentes, pero menos importantes existen: necesidad de que los triángulos sean equilaterales ("no es un triángulo porque tiene una gran punta allí", 5;6), de que su base sea paralela al borde de la mesa (al voltear la tabla: "Es un triángulo si se ve desde este lado", dice un sujeto de 6;5), etc.

Pero esta tendencia a empezar por el disyunto (o por aglomeración parcial como ISA) es reveladora de un postulado fundamental que pronto enuncia CRI: el número de los triángulos posibles depende exclusivamente de la superficie disponible si "todavía hay lugar". De allí, la reacción general (al respecto, se podrían citar muchos ejemplos, como en el caso de las divisiones disyuntas), según la cual, al aumentar el tamaño del polígono encubridor, aunque sólo en un punto determinado, se aumenta el número de los triángulos posibles, mientras que al disminuir su tamaño (CRI al final) ya sólo se puede hacer un triángulo.

Por tanto, se da una falsa generalización inductiva, implicada por consideraciones constructivas anteriores y no pertinentes, pero que son tan fuertes que, aun cuando se facilita, e incluso se sugiere la correspondencia entre el número de triángulos y el de los lados del polígono total, no se provoca ninguna comprensión (ISA).

§/2- EL NIVEL IB- De 6;0 a 7;5 aproximadamente, se observan reacciones de transición entre las actitudes anteriores y el establecimiento de la relación entre el número de las figuras inscritas y el de los vértices o lados del polígono encubridor:

MAR (5;10) empieza igual que en IA, salvo que, después de algunas vacilaciones, logra encontar los 5 T de un pentágono: "¿Cómo se hace? *-Porque hay 1 allí, 1 allí, etc.* -¿Ves cuál es el truco? *-Se hace un lado solamente* (interpretación disyunta de la condición exigida). -¿Y si se aumenta aquí (vértice D)? *-No, habrá más porque se aumentó* (múltiples tentativas). *No, no se pueden hacer más.* -¿Cuántos querías? *-6.* -¿por qué 5?. *-Si hicieramos así* (entre C y D, sin añadir ángulo) *habría 1 más.* -(Hexágono) ¿Cuántos T? *-Hay 6 barras.* -¿Cuántos T? *-6.* Y ¿con 7 barras? *-7.* -¿Y con 8? *-8 T.* -(Se aumenta en E) *-Tendremos igual que antes.* -¿No más? *-Si se puede añadir una barra.* -(Cuadrilátero en forma de rombo). -(Hace los 4 T) -¿Cómo lo explicas? -

Porque tenemos 1, 2, 3, 4 (enseña las barras o vértices) *y 1, 2, 3, 4* (enseña los lados). - (Aumento). -*La misma cosa.* -(Pentágono muy irregular por aumento en C). ¿Cuántos T? -*3* (disyuntos) -Trata. -(Vacilaciones) *5.* -¿Por qué? -*No sé... porque hay 5 y 5* (vértices y lados)".

PAT (6;5) también cuenta con las barras y se confunde con el aumento del pentágono: "*Nada va a cambiar, nada más se hace grande.* -¿Pero, tengo más lugar? - *Sí, creo que habrá más*", etc.

RON (6;3). Pentágono: prevé 3 T, largas vacilaciones y encuentra 5 T. "¿Por qué? - *Porque había más lugar* (que para 3). -(Aumento en C). -*Más T, porque hay más lugar.* -¿Cuántos? - *7.* -Trata. -*5.* -(Otro aumento). -*Siempre 5.* -¿Por qué? -*Porque ya no tenemos ideas* -(Hexágono)". Prevé 7 T "*porque hay más lugar*". Encuentra 6 y "*siempre 6*" en función del número de las barras. Para un cuadrilátero: 4 T "*porque ya no hay barras*" y con aumentos "*siempre 4 porque no hay mucho lugar*".

GIL (6;8) prevé 3 T para un pentágono y con mucho trabajo encuentra 5. "¿Y si hacemos eso (aumento en D)? -*No sé.* -¿Más o menos que 5, o igual? - *Menos porque* (el ángulo agudo en D) *hay una pequeña forma* (Se ensancha). -*Más porque el lugar es grande* (tentativas) *1...5* (Nueva extensión). *La misma cosa, porque tenía más lugar y siempre tengo 5*". Explicación: "*Porque siempre hay 5 hoyos*". Nuevos cambios: "*Siempre 5*". Hexágono: prevé 6. Cuadrilátero (Q) inscrito en el pentágono: vacilaciones y: "*Ya encontré la solución* (4 angulos inferiores)". Encuentra 6Q y 6T: "¿Es la misma cosa? -*Sí.*", luego se corrige y obtiene 5T y 6: "¿Por qué 6Q? -*Porque se pueden igualar con 6 ganchos.*"

GUI (7;0) cree todavía en el aumento del número de los T cuando se aumenta el pentágono: "*5, no 7.* -¿seguro? -*No, 6. Eso cambia todo.*" Luego, acepta la constancia de 5. Para los Q, prevé 2 y encuentra 5. "¿Por qué? -*Hay 5 cosas* (barras). -¿Y los T? -*5 también*". Hexágono: prevé 6T. "¿Por qué? -*Tengo 6 barras.* -¿Y los Q? -*6 creo, porque tengo 6 barras.* -¿Y si hay 7 lados, cuántos T? -*7.* -¿Y cuántos Q? -*7, no 5.* -¿Y allí (hexágono)? - *5*".

Los dos progresos notorios en estas reacciones son una generalización inductiva susceptible de conferir una regularidad a las observaciones, aun cuando éstas son contrarias a las previsiones; y por consiguiente una eliminación, muy laboriosa, del factor, hasta ahora dominante, pero no pertinente, es decir del tamaño. Pero, el hecho de descartar un obstáculo o un factor deformante ("el lugar") que, en un principio, sigue apareciendo en estos sujetos, abre nuevas posibilidades e implica nuevas explicaciones. Pero estos sujetos todavía no han llegado a esta etapa porque primero se trata de descubrir nuevas regularidades y de establecer una relación entre ellas, es decir, encontrar las leyes que sustituyen las falsas relaciones admitidas hasta ahora; y estas leyes, a pesar de haber sido obtenidas por generalización inductiva de las simples observaciones, pueden llegar a parecer explicativas por sí solas, a causa de su novedad. Y es lo que pasa con el número de las barras. Al

descubrir que el aumento del polígono encubridor en un punto no modifica el número de los triángulos, el sujeto llega a concluir (y en eso reside el progreso con respecto al nivel IA) que esta constancia se debe al hecho de que el número de las barras, primero, no cambió y que, por tanto, existe una relación entre los dos números. Este descubrimiento, en un primer momento implícito en MAR ("si se pudiera añadir una barra") y, sobre todo, en RON (que piensa en términos de "lugar" tanto como en términos de "barras") se vuelve muy explícativo en GIL ("porque siempre hay 5 hoyos") y en GUY ("6, creo, porque tengo 6 barras"). Pero, ¿cuál es el sentido de esta relación y se pueda decir que constituye ya una explicación?

Estamos aquí en presencia de la misma situación que en el capítulo III, a pesar de que el problema planteado al niño sea obviamente más sencillo. La "razón", como explicación posible gracias a la generalización constructiva, equivale a destacar las coordinaciones necesarias que intervienen ya desde la acción y sus construcciones materiales, pero cuya explicación sólo será dada en el nivel IIB (lo mismo que en el capítulo III). Pues, esta conceptualización tardía de las condiciones intrínsecas sólo constituye el tercer nivel de la toma de conciencia de las acciones: en el primero de estos niveles, el pensamiento no alcanza sino los resultados exteriores de la acción, siendo ésta inmediatamente adaptada o resultado de vacilaciones (por falta de dirección conceptual); en el segundo nivel, la conciencia coincide con el desarrollo de las acciones en sus manipulaciones materiales sucesivas, pero pueden ser, en parte, dirigidas por los progresos de la conceptualización; en fin, en el tercer nivel, el pensamiento remonta desde estas manipulaciones hasta sus coordinaciones necesarias.

Pero, parece claro que la relación descubierta por los sujetos del nivel IB, entre el número de los triángulos y el de las barras, se queda en el primero de estos niveles con algunas escasas tentativas hacia el segundo. En efecto, por una parte, sus acciones no presentan aún ningún método y sus múltiples vacilaciones (que hubiera sido fastidioso transcribir en el detalle) no los conducen a una solución sin la ayuda del experimentador, que frecuentemente les recuerda la condición exigida. Por otra parte, la correspondencia término con término de las figuras inscritas con las barras, está lejos de ser estable y cuando está invocada como explicación, es porque la estructura de correspondencia (de formación muy anterior y ya sensorial-motriz) sugiere que interviene una relación objetiva entre el número de estas figuras, o de las ligas que las materializan, y el de las barras en las cuales se

fijan las ligas, pero sin que el sujeto pueda precisar la naturaleza de esta relación.

§/3- EL NIVEL IIA- Los dos progresos que caracterizan este nuevo nivel son, por un lado, la acción del sujeto que adquiere más firmeza (menos necesidad de ayuda) y presenta muchas veces un principio de método que, a su vez, demuestra una toma de conciencia de las fases de la manipulación; y por otro lado, al invocar el número de barras, el niño se refiere ahora a la "forma" y ya no al "lugar", lo que supone ciertas generalizaciones inductivas correctas (pero con ciertas dificultades todavía en lo que se refiere a los cuadriláteros no inscritos):

SCA (7;2) se queda a un nivel intermedio entre IB y IIA: sus acciones siguen siendo insuficientes (necesidad de ayuda) y los aumentos le causan problemas: "*Vamos a ver, no se puede ser preciso siempre*". Empieza por suponer menos T "*porque está más ancho no se podrá hacer bien los T*", pero luego: "*Se mira los lados: simplemente se cambió la barra de lugar.* -¿Pero si está más grande, por qué no habrá más T? -*Porque se hizo una forma* (¡), *se puede hacer la misma cosa*". Para los Q inscritos, la acción se mejora y SCA prevé inmediatamente 5, así como para un pentágono. Después del aumento, anuncia el mismo número "*porque volvió a hacer una forma que sólo puede tener 5*". Hexágono: previsión correcta de 6 T, fundada en las barras.

RIK (7;11) actúa con método para los T con un pentágono: relaciona los lados adyacentes en el orden (de los vértices) 1, 2, 3, 5, 4 y quita por sí solo un T no conforme con la condición exigida: "*Ah, no*". Después del aumento, se nos olvida quitar la antigua barra A: "*Serán 6 porque añadió una barra.* -Pero aquella ya no cuenta. -*Bueno, entonces 5*", y precisa que contó mentalmente visualizando la colocación de las ligas (cf. su método inicial). Para los Q, prevé que "*no se puede poner 5*", sin duda ya que tienen más lados (cf. más tarde, KAR). "¿Tienes un medio para averiguarlo? -*No...* (sí) *hay que seguir las ligas* (todavía no colocadas: cf. siempre su método de construcción) *y ver si se puede hacer un Q*". Para el hexágono, construye los T con método, tomando en cada caso una pareja de vértices opuestos y encuentra 6 (después de haber previsto 4) "*porque utilicé todas las barras y no se podría poner más.* -¿Y con 7 barras (hexágono)? -*7T y si 8 (octágono) entonces 8T*".

SAM (7;5 adelantado) construye los T en un cuadrilátero encubridor procediendo a partir de vértices opuestos, y conserva el número 4 después de los aumentos "*porque siempre hay 4 ángulos*". Pentágono: previsión 5. "¿Es necesario probarlo? -*Creo que sí*", de allí una construcción metódica en el orden 1, 2, 3, 4, 5 de los vértices sucesivos. Aumentos: "*5 también, siempre hay el mismo número de chinches, entonces habrá un número igual de formas*". Mismas reacciones para los pentágonos irregulares, pero "*creo que no se puede decir si no se trata, hay que ser sabio para decir*". En cambio, dificultades de construcción para los Q. Sin embargo, la generalización final da algunas ideas justas, mezcladas con confusiones: "¿Esta figura (pentágono)? -*5T* -¿Si queremos 7T, qué figura? -*con 7 chinches.* -¿Y cuántos Q? -*7.* -¿Y cuantas formas con 5 lados (en el heptágono)? -*Muchas, habría que contarlas.* -¿Entonces? -*Por lo menos 7, si no es más, pero no podrán ser más que 10 chinches.* -¿Pero exactamente? -*No menos de 7 porque hay 7 chinches.* -¿Y cuántas figuras (inscritas) con 6 lados? -*No menos de 6*

(confusión entre inscritas y encubridoras). -¿Y cuántas figuras con 7 lados? -*No menos que 7* (sólo hay una)".

KAR (8;2): construcción de los T (pentágono) por parejas opuestas más el último. Aumentos: todavía "*5 porque no hay mucha diferencia: éste* (chinche) *ha sido alejado*". Hexágono: "*Quizá 7 porque hay 7 chinches*". Pero esta generalización extensiva desaparece con el octágono por el cual prevé 7T. Asimismo para los Q en el pentágono: "*3, porque se toman 4 lados, tenemos menos chinches disponibles*".

NIC (8;8): mismas reacciones pero con generalizaciones hasta el octágono y el decágono, y eso para los Q como para los T, pero después de una falsa previsión para los Q en pentágono: "*Los T toman 3 barras y los Q 4, entonces es uno menos*". Aumentos: "*Eso no cambia nada*".

ATI (8;1) describe en el detalle su método de construcción: "*Parto de E y voy a DE y parto de C y voy allí y allí etc*"..., pero los Q le cuestan algún trabajo. Generalizaciones finales: 6T y 6Q para los hexágonos y 7 de cada uno también para los heptágonos "*porque tomaría una liga en la nueva barra y dos barras más*", pero luego se corrige: 7T y sólo 6Q "*porque los Q son más grandes que los T. Toman 4 barras mientras que los T sólo 3*".

HEN (8;1) emplea para sus construcciónes la fórmula bonita de: "*Se ve con los dedos*"... "*a causa de la forma y de los pasos*". Hexágono: "*Lo interesante es que hay 6 barras y 6T.* -¿por qué? -*Sí, para tener los 6T se toma 3 barras, 3 barras, 3 barras...*" Heptágono: "*Creo 8 o 7, luego contamos.* -¿Forma con 11 barras? -*Pues, puede ser 9, tendríamos 8, 9, 10, 11 barras, entonces habría 1 que parte de aquí, serían 8, 9... ah, 11.* -¿9 u 11? -*11*".

Sin duda estos sujetos se encuentran en el segundo de los tres niveles de la toma de conciencia que señalábamos en el # 2: por una parte, siguen con el pensamiento el detalle de sus manipulaciones ("Voy de allí hasta allí", etc., ATI o "se ve con los dedos", HEN) y por otra parte, éstas se mejoran ya que el niño actúa con un principio de método (RIK, SAM, KAR, etc.) sin tener que recurrir a una ayuda, salvo en los casos de los cuadriláteros inscritos. El progreso, debido a esta abstracción que sigue siendo en parte empírica pero que se orienta hacia la reflexión, reside en el hecho de que la correspondencia con el número de las barras empieza a cobrar un valor explicativo: lo que cuenta ya no es el "lugar", sino la "forma" (ya en SCA), y, por consiguiente, los "lados" (SCA, etc.) y los "vértices" (SAM, etc.), lo que, en relación con el método de construcción ("A causa de la forma y de los pasos" dice HEN, el segundo término siendo implicado por el primero), proporciona la razón, aunque todavía muy implícita, de las correspondencias observadas. Este carácter implícito de las explicaciones, debido a la falta de las coordinaciones necesarias (tercer nivel que empieza a darse en IIB), constituye el límite de este nivel IIA: las

generalizaciones siguen siendo, ante todo, inductivas (con fracaso con respecto al octágono en KAR) e incluso SAM, el sujeto más adelantado, tiene dificultades con los cuadriláteros inscritos y, en sus deducciones finales, llega a confundir parcialmente las formas no inscritas y las encubridoras. En cambio, el error de KAR, NIC y ATI con respecto a los números inferiores de cuadriláteros a causa de sus 4 lados, es en principio inteligente, porque la idea estaría fundada si las barras estuvieran ordenadas lineal y no cíclicamente (cf. los cuádruplos con n-3 ligas en el capítulo III).

§/4- EL NIVEL IIB- La diferencia entre las reacciones de este nivel y las de IIA, puede parecer sútil pero es muy reveladora: mientras que el sujeto del nivel anterior se mira actuando pero "ve con sus dedos" (HEN), lo que mejora un poco su acción aplicándole un principio de método, sin alcanzar por tanto las coordinaciones necesarias (de allí la falta de previsión justas antes de las tentativas), los sujetos del nivel IIB piensan antes de actuar y programan sus acciones, lo que les conduce, a la vez, a hacer previsiones por lo general correctas, y a acercarse a estas coordinaciones formadoras:

DAO (8;5) (adelantado) domina los problemas de T hasta 11 vértices. Para los Q (pentágono) sólo prueba y el primero y luego "*pienso que habrá 5 también* (como los T). -¿Por qué? -*Lo hice en mi cabeza.* -¿Te ayudan las letras (frente a cada barra)? -*Sí, es más fácil para ver. Tomo una letra así y paso a la siguiente*", y también: "*Miro los vértices y trato de hacerlos.* -¿No es raro 5 Q? ¿Tiene un lado más? -*No, se cruzan más a menudo* (intersecciones). -¿Y para una figura de 11 lados, cuántos Q? -*Serían 11*".

DID (8;10): T en el pentágono: prevé 4. "*Traté de todas las maneras*", pero mentalmente, luego enseña el 5o. que había olvidado porque no era "*normal*" como los demás. "¿Cómo hacerlo para no equivocarte? -*Se hace de A a C* (ABC), *luego de C a E (CDE)*, de E a B (EAB), *EBC está mal, de D a A* (AED), *luego de A a D, no, ya lo hice.* -¿Y para no volver con los mismos? -*Por ejemplo ABC y AED* (simétrico), *siempre el que está enfrente.* -Y otro truco: hago ABC y ¿de dónde partirías? -*Ah!, de B (BCD), etc.*" Para los Q, mismos logros por simple inspección visual.

NIL (9;2) calcula inmediatamente por visualización, los T de un pentágono y después de haber indicado 4, afirma: "*Ya está hecho, los bordes* (lados del pentágono) *están ocupados.* -¿Entonces, cuando todos los bordes están ocupados, ya está terminado? -*También las barras, hay en todas partes, salvo aquí* (entonces 5)". Hexágono: "*4.* -¿Y antes? -*5.* -(Visualización) *Pues, por lo menos 6* (los enseña por parejas simétricas)". Heptágono: "*7.* -¿Cómo lo hiciste? -*Pues, seguí el orden, empecé aquí (A), luego B, luego C, y así siempre* (enseña con el dedo) *7*". Para los Q (Pentágono): "*Cuento a partir de cada barra ABCD, BCDE, CDEA, etc., son 5.* -¿Y con una figura con 11, cuantos Q? -*11 porque se empieza por cada barra.* -¿Y con 7? -*También 11.* -¿Y con 11 barras cuántas figuras con 10 lados? *¡Ah! está difícil: 11 también*".

Vemos que este paso de una interiorización de la acción después de ejecutarla (IIA) a una conceptualización anterior a la acción, lo que supone una programación real o posible, conduce a estos sujetos a un análisis estructural más desarrollado, que los acerca a las coordinaciones lógicamente necesarias: DAO explica de esta manera la igualdad de número de los triángulos y de los cuadriláteros por el aumento de las intersecciones; DIN y NIL buscan las condiciones de una enumeración exhaustiva en los procedimientos mismos de la construcción, lo que es mejor que averiguar a posteriori una ley de correspondencia, etc. Pero todo sigue siendo casi implícito, mientras que en el estadio III encontraremos finalmente un análisis propiamente dicho.

§/5- EL ESTADIO III- He aquí primero algunos ejemplos que se inician con un caso intermedio entre los niveles IIB y III:

EST (9;10) empieza por sólo encontrar 3T en el pentágono, y luego llega mentalmente a 5. "¿Por qué? *-Porque hay 5 lados, entonces por eso sólo encontré 5. Si hubiera habido 6 barras, hubiera encontrado 6, y con 1 menos, 4*". Para los Q, también prevé 5 (los enumera). "¿Y con eso (hexágono)? *-6 Q.* -¿Segura? *-Sí.* -¿No hay necesidad de probarlo? *-No, porque si son 5 barras, forzosamente serán 6.* -¿Y para 10 lados? *-10 T y 10 Q.* -¿Siempre funcionará así? *-Sí. Cada vez se toma una barra entonces forzosamente 10.* -¿Pero por qué? *-Se toma una barra (A) y se toma B y C y luego se vuelve a tomar B con C y D, cada vez se toma una barra, forzosamente serán 10*".

LAU (11;3) anticipa inmediatamente un n de T igual al de los chinches. "Explica. *-Una vez así, una vez así* (enseña los vértices sucesivos entre los chinches vecinos)... *Porque dos chinches por cada uno* (entonces 2 lados) *y así avanza, tac, tac, tac, etc.*". Más tarde: "¿Y para una figura con 19 lados? *-19T y 19Q.* -Enséñame todas las construcciones posibles con una figura con 9 lados. *-1 figura con 9, 9 a 8, no 9 a 8, 9 a 7, 9 a 6, 5, 4, 3, 2.*"

MAC (11;10) 5 T para un pentágono "*porque hay 5 barras y siempre es el medio de un T y cambian:* ABE→ ABC→ BCD→ etc." Para los Q, se debe "*utilizar las mismas reglas* (ligera vacilación). -¿Por qué vacilaste? *-Porque aquí se salta más que a uno, pero es lo mismo.* -¿Y con 150 lados? *-Se puede hacer un montón de figuras con 99, 98, etc.* -¿Cuántas? *-150 siempre.* -¿Y con 149? *-150 también.* -¿Y con 150? *-Una sola*".

Primero se observa la justificación explícita de la doble recurrencia en juego en nuestros problemas y eso, en los dos casos, al dar la razón del paso de las propiedades da n a n + 1. En primer lugar, el sujeto EST nos muestra que si la igualdad de número de los triángulos y de las barras es cierta para 5 (pentágono), "lo será forzosamente (también) para 6", porque, en ambos casos, "se toma una barra" con sus dos vecinos. En segundo lugar, MAC afirma que,

si la ley es cierta para los triángulos, lo es también para los cuadriláteros "porque aquí se salta más que uno pero es la misma cosa".

De esta manera vemos que esta doble recurrencia ya no se debe a generalizaciones simplemente inductivas, sino a inferencias constructivas cuya propiedad reside en fundarse, no sólo en los procedimientos de construcción de la acción efectiva, sino también en sacar de ella las cordinaciones necesarias ("entonces forzosamente" dice EST, o "es la misma cosa", MAC, etc.), es decir, alcanzar el tercer nivel de la toma de conciencia: el de la abstracción propiamente reflexionada, mientras que el segundo nivel, la constatación del desarrollo de las manipulaciones sucesivas sigue dependiendo en buena parte de la abstracción empírica.

En fin, se admira la manera en que esos razonamientos conducen a los sujetos, como lo implica la regla a este nivel de las operaciones formales, a orientarse inmediatamente hacia nuevos posibles: MAC maneja con tanta facilidad los polígonos con 150 lados como los con 5 lados. En tales casos, la generalización constructiva no se limita a elaborar nuevas formas, porque éstas engendran a su vez nuevos contenidos. Esto parece casi obvio en el campo lógico-matemático en el cual la recurrencia conduce a "todos" los números hacia el infinito, pero veremos en los capítulos XI y XII que esto sigue siendo cierto para muchas situaciones en el campo físico.

§/6- CONCLUSIONES: El primer punto que es preciso subrayar es la analogía sorprendente de los niveles observados en este capítulo y en el capítulo III. Por supuesto, se trata en ambos casos de doble recurrencia que se aplica concretamente a pequeños conjuntos a construir por medio de ligas y barras. Pero, como en el capítulo III, estas barras se suceden linealmente, las parejas, tríos, cuádruplos que se trata de realizar son numéricamente de n-1, n-2, n-3, etc. En cambio, en el presente caso, los conjuntos se expresan bajo la forma de figuras (triángulos, etc.) y se inscriben en otras figuras cuyas barras que han sido colocadas en sus vértices, se suceden según un orden cíclico. De allí la correspondencia n con n que parecería deber facilitar las soluciones, junto con su carácter formal. Pero, al contrario encontramos un paralelismo completo. En ambos casos, las reacciones del nivel IA están guiadas por falsas ideas preconcebidas: correspondencia n con n cuando la verdadera sería n con n-x; el papel del "lugar" o superficies cuando sería preciso establecer una correspondencia n con n. En ambos casos, el nivel IB sólo ofrece ligeros progresos ya que el sujeto sólo toma conciencia del resultado de sus acciones y todavía no de su

desarrollo. Posteriormente, el nivel IIA marca el acceso al segundo nivel de la toma de conciencia, con cierto mejoramiento de las acciones, pero con una dificultad en el paso de las parejas a los tríos en el capítulo III, y de los triángulos a los cuadriláteros, en el presente estudio. En ambos casos, también se da posteriormente un principio de utilización del esquema de las acciones, con sus coordinaciones intrínsecas. De allí, un progreso notorio de la generalización constructiva que predomina definitivamente en el estadio III.

Esta convergencia admirable en las dos evoluciones se debe naturalmente a las relaciones estrechas que existen entre las transformaciones de la generalización y las etapas, no sólo de la toma de conciencia, sino también, y sobre todo, de las formas de abstracción que ésta detemina. Al principio (estadio I), el sujeto se limita al descubrimiento del resultado de sus acciones que incluso aparece en un primer momento deformado (nivel IA), y solamente después está aceptado (subestadio IB): de allí, las falsas abstracciones empíricas y luego correctas, así como las generalizaciones inductivas erróneas (papel del "lugar", constante y falsamente generalizado en el nivel IA) que se vuelven posteriormente válidas a pesar de que sigan siendo muy breves. A este respecto, no habría que olvidar que toda generalización inductiva supone un marco previo cuya utilización actual puede ser o no justificada y cuya formación se debe a generalizaciones constructivas anteriores y más elementales. Posteriormente y en la medida en que el sujeto va tomando conciencia del desarrollo de sus acciones exitosas (por abstracciones que siguen siendo, ante todo, empíricas acerca de las manipulaciones consideradas como tales, es decir materiales), y finalmente del esquema mismo con sus coordinaciones necesarias (abstracción reflexionada), la generalización se vuelve cada vez más constructiva hasta llegar a esta sorprendente capacidad de los sujetos del estadio III para construir nuevas figuras que aparecen con formas y hasta con contenidos no dados empíricamente. En efecto, estas nuevas figuras son deducidas, no del material en el cual no venían incluidas, sino a partir de construcciones anteriores o de sus resultados, pero siempre fundándose en posibilidades abiertas por éstas, lo que representa algo decididamente nuevo.

Volvemos a encontrar aquí las tres fases de la formación de los razonamientos recurrentes: 1) constataciones sobre n, es decir sobre los resultados anteriores que han sido simplemente registrados y que no son suficientes para asegurar el desarrollo posterior, salvo por vía de inducción extensiva, o sea sin necesidad; 2) el paso de n a n

+ 1, constituido por las dos suertes de justificaciones señaladas en el estadio II (EST y MAC) y que, por sí solas, introducen la necesidad proveniente del esquema de la construcción en acciones; 3) la generalización para todo lo que sigue (verdadera para "todos" los n, en principio hasta el infinito).

Ahora queda por precisar lo que estos hechos nos revelan en cuanto a las relaciones entre los dos tipos de generalización (y de abstracción). De cierto modo, estos dos tipos siempre vienen reunidos e indisociables (como lo son también en cierto sentido las abstracciones empíricas y reflexionadas), pero el hecho de que en el transcurso de su desarrollo cambien, no sólo de proporciones sino también, y sobre todo, de subordinaciones, impide hablar de un proceso continuo, e implica conferir a las formas superiores (o más precisamente lógico-matemáticas a partir de un nivel de metarreflexión) de las generalizaciones inductivas y de las abstracciones seudo-empíricas, un significado diferente al que tenían las formas iniciales.

Al principio, vimos que las variedades más elementales de generalización inductiva (y por consiguiente de abstracciones empíricas) suponen ya un marco previo de construcción (y también de reflexión), tal como la división de las superficies en sectores disyuntos, y naturalmente la triangularidad (no limitar los triángulos a los equiláteros) etc. Pero se trata de formaciones anteriores al razonamiento actual, o más elementales. Si remontamos a los orígenes sensorial-motrices, se observa que la formación de todo esquema de asimilación es ya dependiente de un factor constructivo (acciones del sujeto), así como de un factor inductivo (asimilaciones reproductoras y por una parte, generalizadoras). Por tanto, siempre habrá una previa construcción y una previa reflexión a toda generalización inductiva y a toda abstracción empírica.

Pero, posteriormente, es necesario distinguir dos situaciones cualitativa y no sólo cuantitativamente diferentes. En la primera, (predominante en el estadio I) la generalización inductiva y la abstracción empírica funcionan de manera autónoma, en el sentido en que, si les es necesario el marco mencionado, éste se limita a *permitir*[13] estas inferencias o juicios, pero no los "engrendra" ya que su alimentación sólo proviene de las sucesivas constataciones del sujeto, es decir, de observaciones no deducibles a partir del marco previo. Ese es el primer significado a dar a los términos de "inductivo" y "empírico", que, de todas formas, corresponde a su sentido usual y propio.

[13] En el sentido de volver posible pero no de validar.

En cambio, por razones ya mencionadas anteriormente, de toma de conciencia, el progreso de la generalización constructiva se vuelve posible, funciona a su vez de manera autónoma en el sentido en que logra *engendrar* (y ya no solamente "permitir") la constitución, tanto de nuevas formas como de nuevos contenidos (cf. los números posteriores o las nuevas figuras en nuestro estadio III) no dados en los datos existentes, antes de esta construcción. En este caso, sería preciso estudiar también los procesos extensivos, pero con un nuevo sentido que reside sencillamente en el enriquecimiento de las "extensiones", correlativo del de las "comprensiones" (formas). En cuanto a la abstracción empírica, deja de referirse a datos exógenos, y por lo tanto de ser "empírica". En este sentido, ya sólo se ejerce acerca de los contenidos engendrados por las construcciones del sujeto y se vuelve "seudo-empírica", tal una prolongación funcional sin continuidad estructural. En resumen, ni los procesos extensivos, ni las abstracciones seudo-empíricas, comprendidas en estos nuevos sentidos, provienen de generalizaciones y abstracciones propias a la primera situación: entre ellas, existe toda la diferencia que distingue lo endógeno de lo exógeno, y el negar esta diferencia equivaldría a aniquilar toda diferencia entre el conocimiento físico y el conocimiento lógico-matemático. Lo que puede causar una falsa interpretación reside en el hecho fundamental comparable con las relaciones biológicas del fenotipo y del genotipo, según el cual jamás existe lo exógeno puro ya que siempre hay necesidad de un marco endógeno. En cambio, a partir de cierto nivel que corresponde al de la formalización, existe una lógica y una matemática "puras", es decir, sin necesidad de recurrir a la construcción endógena o al control o validación exógenos (lo que distingue los mecanismos del pensamiento de los de la epigénesis orgánica, a pesar de que lo propio del "génome" resida en contestar por reacciones endógenas a las tensiones exógenas del medio).

CAPITULO V
LA RECURRENCIA EN LA SUMA DE LOS ANGULOS DE UN POLIGONO CONVEXO

con J. Cambon y J. Cuaz

Una tercera investigación sobre la generalización constructiva de tipo recurrente se refiere a la suma de los ángulos de los polígonos convexos: 180º para los triángulos, 360º para los cuadriláteros, 360 + 180º para los pentágonos, etc., o sea, un triángulo adicional cada vez ya que las cuantificaciones en grados pueden ser reemplazadas por unidades figurativas: una media luna para los 3 ángulos del triángulo,[14] una entera para los 4 ángulos, una y media para 5, etc. Para el niño, se tratará de construir en cada polígono de n sumas el número de triángulos, T, disyuntos que éste incluye[15], T = n-2, y de traducir el número de T en términos de semicírculos. Aparentemente, el problema es sencillo, con una función recurrente que no contempla la variabilidad de x en la función n-x del capítulo III, ni las intersecciones múltiples de las figuras inscritas en el capítulo IV (ya que aquí los T deben ser disyuntos). Quizá, sería interesante comparar brevemente estos resultados con los de los capítulos anteriores porque, en realidad, lo que sigue nos demostrará la existencia de tres etapas sucesivas en la recurrencia y sobre todo de un conflicto sistemático en los niveles IB y IIA, entre la generalización inductiva fundada en los datos observables (los ángulos del polígono estimados en función de la percepción) y la generalización constructiva que se apoya en la descomposición en triángulos (esto siendo de n-2 cuando el número de los lados está representado por n).

La experiencia se desarrolla en dos partes en el transcurso de la misma sesión. En la primera, se presenta una serie de figuras y se pide: 1) anticipar el resultado de la división en ángulos y de la reunión de los pedazos obtenidos de esta manera, 2) en caso de error (y sólo en cuanto a los triángulos y cuadriláteros) se le pide al sujeto una

---

[14] Hemos realizado anteriormente con B. INHELDER (La geometría espontánea del niño) un análisis de las reacciones en la suma de los ángulos y es por eso que no volveremos sobre ello, aquí.

[15] No sólo disyuntos sino partiendo de un mismo vértice del polígono y teniendo uno o dos lados en común con los de este polígono.

realización práctica, 3) explicación del resultado comprobado de la anticipación.

Se empieza con triángulos, con (para los jóvenes sujetos) un arco ya trazado en los ángulos (triángulo, rectángulo, luego cualquiera y en punta), luego (sin arcos trazados) un gran triángulo y otro minúsculo. Se pasa a los cuadriláteros, con arcos trazados (trapecio regular y cuadrado), luego sin arcos (rectángulo alargado y cuadrilátero cualquiera). Después de eso, se pasa a los pentágonos (sin arcos) regulares o irregulares. Ya no se procede por acciones, sino por dibujos del niño (en caso de fracaso de la anticipación) que le permiten imaginar la reunión de los ángulos divididos mentalmente. Luego intervienen los hexágonos regulares o no. De allí se pasa (sin presentación de las figuras) a polígonos con n a n+1 lados: por ejemplo hepta u octágono, con 24 a 25 lados, con 100 a 1001. Se pide indicar el número de círculos, o semicírculos o bien solamente la ley de paso y, sobre todo, el método a utilizar.

En la segunda parte, se propone al niño (si no la ha encontrado espontáneamente) una descomposición del polígono en triángulos disyuntos (partiendo de un mismo vértice). Para este fin, se vuelve al trapecio sugiriendo al niño dibujar allí triángulos 1º trazando una diagonal. Luego, y de la misma manera, se hace dibujar los triángulos (3) del pentágono, luego los (4) del hexágono, etc. Entonces, se vuelven a plantear las mismas preguntas acerca de la suma de los ángulos del polígono total y su causa.

Precisemos ahora que otra técnica fue probada: partir de un triángulo al cual se añaden otros. De allí 4, 5, etc., lados de esta construcción cuya figura es irregular. En realidad los resultados obtenidos con esta técnica no fueron muy diferentes de los obtenidos mediante la descomposición y presentaron los inconvenientes siguientes: se pierde la forma habitual del polígono total y los triángulos son considerados por su cercanía más bien que por su suma definitiva. Por tanto, no hablaremos de estos últimos hechos.

§/1- EL NIVEL IA- En primer lugar, la generalización no supera el paso de los triángulos a los cuadriláteros y aún se hace con mucha dificultad:

MAG (5;6): triángulo: "Si corto allí siguiendo las líneas, ¿puedes adivinar lo que vas a hacer al juntar los pedazos? -*No* (corta y los arregla). *Una casa, un círculo... una mitad de círculo!* -¿Y con eso (T escaleno). -*Un techo de iglesia.* -¿No es un T? -*No, porque tiene una punta grande allí, es puntiagudo.* -¿Y si se cortan los picos? -*No sé* (lo hace). *¡Una mitad de círculo!* -¿por qué? -*Porque allí es la misma cosa* (enseña un pedazo del primer T y del segundo). -¿Y con eso (pequeño T)? -*No puesto que es pequeño*". Pero generaliza después de comprobaciones. Se pasa a un cuadrado: prevé "*un círculo totalmente cerrado.* -¿Por qué? -*Porque el cuadrado es grande.* -¿Se puede hacer T? -*No.* -Trata. -(Dibuja unos T inscritos pero no llena toda la superficie)". Entonces se traza la diagonal: "¿Me puedes explicar por qué con un T se hace un semicírculo y con el cuadrado un círculo? -*Porque es grande* (luego mira los dos T construídos por la diagonal) *No se puede hacer* (con eso) *uno totalmente redondo porque son dos T.* -¿por qué no? -*Porque no es un cuadrado como éste* (sin diagonal)". Rectángulo: ninguna previsión, "*no sé*". Cuadrilátero irregular con un ángulo agudo: "*No sé... un círculo entero... no una mitad de círculo porque* (sólo) *hay 3 picos* (los ángulos rectos y obtusos)".

BIA (5;1) prevé "*un círculo*" para los picos de un T, luego comprueba: "*Hace un túnel* = (semicírculo)" y generaliza para unos T diferentes "*porque hay los mismos*

picos... las mimas formas". Para el cuadrado prevé inmediatamente "*una pelota.* -¿Por qué? -*Porque hay 4 picos, hay uno más.*" Se junta 2T en un cuadrado: "*Un círculo.* -¿Por qué? -*Porque allí* (uno de los T), *hay 3 picos y allí también, son 6 picos.* -¿Y con 6 picos qué haces? -*Ya no me acuerdo, un túnel, una pelota.* -¿Y con 4 picos? -*Una pelota.* -¿Y por qué 4 y 6 hacen también una pelota? -*Porque es la misma forma* (los 2T en el cuadrado)". Rectángulo y cuadrilátero irregulares: "*Una pelota, también hay 4 picos.* (Pentágono). -*Una pelota, la misma cosa que antes.* -¿Igual que con el cuadrado? -*Sí, pero será más grande porque hay 5 picos.* -(¿Hexágono?) *Una gran pelota, hay varios picos*".

FRE (6;2), semicírculo para los T y "*un círculo entero*" para los Q. "(¿Pentágono?) -*Un gran círculo entero se puede hacer grandes picos*". Se corta un trapecio en 2T que FRE vuelve a juntar: "*Es una mitad de T* (enseña el trapecio, o sea 2 mitades), *no es suficiente para hacer un círculo entero... no, está lo suficientemente grande para hacer un círculo entero*", (c.f. MAG para el cuadrado con diagonal).

ARI (6;8) las mismas reacciones. Para el pentágono: "*Un círculo entero* (muy segura de sí misma). -¿Quizá se podría hacer 2 círculos? -*Sí se podría* (vacilaciones). -¿Y con 3 picos? -*Un semicírculo.* -¿Y con 4? -*Un círculo entero.* -¿Y con 5? -*Un círculo entero también* (segura y reconfortada). -(Heptágono) -*Hay 7 picos, eso hace un círculo entero*".

En estos sujetos se da una generalización final del semicírculo para los triángulos, pero MAG responde primero para los pequeños triángulos y luego se basa simplemente en la analogía de dos de los pedazos divididos, pues un triángulo "puntiagudo" no es un triángulo, además, este niño no considera todavía las esquinas. Por otra parte BIA prevé al comienzo "un círculo" entero.

Al pasar a los cuadriláteros, hay en general, previsión de "un círculo entero" pero no es sólo porque están formados por 2 triángulos sino porque son "más grandes" (MAG) o porque hay "más" esquinas, el sujeto no piensa en ningún intermediario entre un semicírculo y uno entero. Por otra parte, cuando se presenta un cuadrado o un trapecio seccionados en 2 triángulos, MAG y FRE piensan que no habrá "un círculo completamente cerrado", porque todavía no es "bastante grande" mientras que BIA acepta el círculo entero porque hay, en este caso, 6 esquinas y 6 hacen como 4. En efecto, cuando se pasa a los pentágonos, hexágonos o heptágonos habrá siempre un único círculo como producto y superficies agrandadas según el mismo principio de "lugar ocupado", y no el de la forma como en los sujetos IA del capítulo IV.

Vemos así que no hay recurrencia en este nivel IA, lo mismo para el paso de 3 a 4 ángulos; las generalizaciones en juego, particularmente referidas a la conservación del círculo único para los polígonos a partir de 4 ángulos, se quedan esencialmente como inductivas, reserva hecha en cuanto a los marcos previos tratados en el capítulo IV.

§/2- EL NIVEL IB- El progreso en relación al nivel IA consiste en adjuntar al círculo, a partir de 4 ángulos, pequeños pedazos suplementarios que corresponden a los ángulos agregados, pero sin ver que no equivalen a la diferencia entre un semicírculo y un círculo entero[16]:

SER (6;10) comprueba "*una media luna*" para un T y generaliza a los otros. Para el trapecio duda y luego se decide por "*una luna redonda*". Para el pentágono "*hay 5 esquinas: una luna y nada más que un pedazo*". Dibuja un círculo dividido en pedacitos en forma arbitraria, y agrega un pedazo exterior diciendo: "*un pedazo* (externo) *y 4 pedazos* (internos) *añadidos*. -¿Y esto (hexágono)? -*Hay 6 esquinas: una luna más dos pedazos*. -¿Y para 7 esquinas? *Quedará así* (uno de más). -¿Y 8? - (Agrega otro)."

NIC (6;1) prevé para T "*casi una mitad del círculo, quizá un cuarto* (tentativa), *la mitad*". Para un T de ángulos muy agudos: "*va a dar un cuarto o un círculo o semicírculo* (tentativa), *un semi*". Cuadrado: "*esto va a dar más que la mitad de un círculo: hay más piezas, hay 4 pedazos esta vez* (tentativa), *un círculo entero*. (Rectángulo). -*Quizá un círculo entero. Rectángulo delgado. Un círculo entero pero muy pequeño*. (Pentágono). -*Un círculo entero más una pieza de más* (de sobra). - (Pentágono irregular) *Como hace un momento* (cuenta los ángulos): *un círculo entero luego un cuarto de más*. -(Hexágono). -*Un círculo entero y la mitad de otro*".

RIC (7;4) da respuestas del mismo tipo. Prevé los 3/4 de un círculo para los T y comprueba el semicírculo "*porque había pequeños* (ángulos)", mientras que un T rectángulo que él llama "*mitad de cuadrado*" dará "*un poco más*" que un semicírculo. Pasa lo mismo con el trapecio, pero el cuadrado dará "*un círculo*" y el rectángulo "*poco más que la mitad*". Pentágono: "*Un círculo entero más una pieza*". El nuevo trapecio: la misma reacción que antes y para el cuadrado, de nuevo "*un círculo* (muy seguro) *porque hay 4 piezas grandes*".

BIN (7;0) prevé "*la mitad de un círculo*" para la mayoría de los T, casi un círculo para el trapecio (ángulos agudos) y "*todo un círculo*" para el cuadrado. Pentágono: "*un círculo y luego el comienzo de otro círculo*" pero sólo "*un gran círculo*" si es irregular. Hexágono: "*un círculo y un pedazo... más grande*". Se le sugiere descomponer el cuadrado en T: "*allí hay* 2. -¿Y ángulos? -*4*. -¿Cuánto vale este T? -*Un semicírculo*. -¿Y el otro? -*También*. -¿Y con los 2? -*No todo un círculo completo. Faltaría todavía uno para completar el círculo*. -Entonces, ¿qué faltaría para uno completo? -*5 esquinas*". Lógicamente con este nuevo punto de vista, ella cuenta los 3T disyuntos inscritos en el pentágono como dando "*un semicírculo, un semicírculo también y éste también* (es decir los 3 semicírculos completos). -¿Y toda la figura? -*Hay 5 esquinas, eso da un círculo completo*". Para el hexágono la reacción es todavía más curiosa: sobre los 4T, los 2 primeros hacen "*un círculo completo*. -¿Y los otros 2? -*Un círculo completo*. -¿Y todo? -*No sé* (cuenta los ángulos), *serán 6. Un círculo completo*".

El interés de estas reacciones, que son la transición entre los niveles IA y IIA, es el comienzo de una cuantificación en función del

[16] Observemos que en los resúmenes de experiencia escribimos T para "triángulo".

número de ángulos: los cuadriláteros darán una suma total superior a la de los triángulos y los pentágonos todavía mayor. Pero como ninguna de estas figuras implica una resultante constante, pues el número de los ángulos no es lo único que está en juego y el sujeto admite las variaciones según sean más o menos agudos u obtusos, entonces, no hay unidad de medida: el sujeto por más que haya verificado que los triángulos dan semicírculos, calcula en realidad, por "piezas" o "pedazos" que vienen a ser más o menos un cuarto. El hexágono de NIC que vale un círculo y medio no se confunde con un pentágono: vale 1 círculo y 2 cuartos ya que los ángulos del pentágono están calculados como un círculo y cuarto.

Esta ausencia de métrica es particularmente sorprendente cuando se le sugiere al sujeto una descomposición en triángulos: por ejemplo BIN, por más que sepa que los 3 ángulos de un triángulo valen un semicírculo y que 2 medios hacen un círculo entero, niega que el cuadrado dividido en 2 triángulos dé todavía uno entero, luego niega que los 3 semicírculos del pentágono dividido en 3 triángulos disyuntos den más que uno entero y también rechaza admitir que los 4 triángulos inscritos en el hexágono y que valen 2 a 2 un círculo (lo reconoce), den más que un círculo en total.

Estas afirmaciones aberrantes se refieren naturalmente al hecho de que cuando el sujeto considera aparte los ángulos de la figura total, los juzga cualitativamente y renuncia a todo cálculo númerico para estimar sólo las superficies.

§/3- EL NIVEL IIA- Las reacciones de este subestadio IIA son, en parte, análogas a las del mismo nivel del capítulo IV, aun cuando el papel de la acción del sujeto sea aquí menor y que, en lugar de una toma de conciencia insuficiente sobre ésta, encontramos en los siguientes casos, al lado de deducciones correctas, una fluctuación entre el número de ángulos y sus características cualitativas, es decir, entre la deducción y el dato observable.

AUB (7;5) prevé un semicírculo para los T equiláteros y después de haber pensado en una superficie más pequeña con ángulos más agudos, explica que "*tienen la misma forma*" y un pequeño ángulo está compensado por uno grande. Al contrario, protesta frente a la idea de que un ángulo más no cambiaría nada: "*un cuadrado que da un semicírculo, ah, no*". La T minúscula: "*igual, un semicírculo porque siempre tiene la misma forma*". Cuadrado: "*un círculo porque hay 4 cuartos de círculo*", un rectángulo también, pero no un trapecio irregular, a falta de compensaciones. Pentágono: "*un círculo y quedaría así*" (un ángulo) pero cuando se le sugiere trazar los T inscritos: "*dará 3T, habría un círculo* (los 2 primeros) *y quedaría todavía un T: un círculo y un semicírculo*". Al contrario, esto no vale para un pentágono irregular, a causa de los ángulos desiguales y un hexágono sólo dará un semicírculo.

ROG (8;4) prevé un semicírculo para todos los T "*porque hay también 3 ángulos*" para los escalenos o los muy pequeños. El trapecio dará "*un círculo. Ah, no, no completo porque serían necesarios 6 pedazos de T para hacer un círculo entero*", pero enseguida que se le sugiere la diagonal: "*sería como si hubiera 2T: un círculo entero*". Pero, para el cuadrado no piensa hacer lo mismo y ve allí 4T, confundiéndolos con los ángulos. Pentágono: "*un semicírculo (1 T) más 2 puentes que faltan*". Para el hexágono cree que: 6 ángulos = 2 T = "*un círculo entero*".

ANI (8;4). Todos los T = un semicírculo. Trapecio: "*un círculo.* -¿Por qué? -*Porque hay un semicírculo de más.* -¿Dónde? -*Un ángulo de más* (pero por confusión ángulo = T". Rectángulo, etc.,: "*También un círculo*". Pentágono: "*un círculo con una pieza de más*" y el hexágono con 2. Se le sugiere los T y ANI acepta inmediatamente que los 2T del cuadrado confirman "*un círculo*". Pero, por el hecho de que se pueden dividir 4 ángulos en el cuadrado y 3 en cada T, la suma de estos 6 dará "*un círculo más 2 ángulos*". "-¿Es lo mismo si divido los dos T de la figura o los 4 ángulos de la misma figura? -*No, no es lo mismo*". Para el pentágono ANI dibuja 3 T. "¿Y si cortamos las extremidades? -*Un círculo con 3 piezas de lado.* -¿Y con las 3 piezas? -*Un círculo y un semicírculo* (completo). -¿Y si dividimos los 5 ángulos de la figura? -*No será lo mismo ya que eso da un círculo* (= el cuadrado) *con una pieza de sobra* (la 5ta. punta)". Se precisa 3T = 3 semicírculos = 1 círculo y un semicírculo. "¿Esto corresponde con lo qué has dicho antes? -*No.* -¿Cuál es lo correcto? -*Los dos.* -¿Es lo mismo dividir, etc.,? -*No es lo mismo, sí, es lo mismo, ah, no.* -Entonces, ¿si o no? -*No, sí, no sé. Será un círculo y un semicírculo.* -¿Será lo mismo si divido los ángulos de la figura? -*No.*" Hexágono: "*6 lados y 4 T.* -¿Si divides los T? -*2 círculos*". Se le hace escribir la lista de las figuras del T en el hexágono, teniendo en frente el número de los lados y el número de los triángulos inscritos para que se dé cuenta que, agregando un lado se añade un T, es decir, un semicírculo (pero sin ver la relación T = n lados - 2).

DOM (9;7) 1 semicírculo para los T y un círculo para el cuadrado "*porque 2 así (T) hace 1/2 de un círculo*". Al contrario, un cuadrilátero irregular: "*Los 3/4 de un círculo, quizá la 1/2.* -¿No un círculo? -*Encuentro que es un poco chico*". Pentágono: "*Un círculo más 1/4 porque con el cuadrado hacen un círculo, entonces si tomamos un ángulo de más, será 1/4 de sobra.* -¿Puedes hacer los T en el pentágono? -*Sí.* -¿Cuántos círculos hacemos con 1T? -*Un semicírculo, pero eso depende si tenemos 1 pequeño ángulo y 2 grandes, será 1/2, pero si tenemos 3 más grandes, será los 3/4* (vuelve sobre sus generalizaciones correctas del comienzo para todos los T). -¿Y aquí? -*Los 3/4 porque los ángulos son bastantes grandes.* (pentágono irregular). *Un círculo y 1/4.* - (¿Hexágono?) -*un círculo 1/2*". Dodecánogo:"*3 círculos porque 3 x 4 es 12*". Calcula como si 4 ángulos de la figura fueran iguales a 1 cuadrado (un círculo).

Como hemos dicho anteriormente el interés de estas reacciones consiste en que ellas corresponden, en términos de datos observables sobre el objeto, a lo que hemos visto en el nivel II A del capítulo IV, en términos de observables sobre la acción. Efectivamente, los sujetos IIA del capítulo IV, cuando sacan de sus acciones ciertas inferencias válidas, no consiguen una toma de conciencia suficiente para alcanzar las coordinaciones necesarias que guíen en realidad sus trabajos. En este caso, no es el detalle de la acción el que plantea problemas: dividir los ángulos del polígono y

unirlos es fácil, la cuestión es, al contrario, saber si los ángulos del polígono una vez reunidos (por el dibujo o en el pensamiento, como lo están en la acción aquellos del primer triángulo presentado) darán la misma suma que los de todos los triángulos disyuntos dibujados en el polígono. Ahora bien, este problema muestra un conflicto interesante entre la generalización constructiva y la inductiva. Contrariamente a los sujetos del nivel IB, éstos generalizan en todos los triángulos la propiedad de incluir los ángulos cuya suma es un semicírculo y esto por un juego de compensaciones estudiadas anteriormente con B. Inhelder. Esto implica ya una parte de generalización constructiva. Cuando un polígono cualquiera cuenta con triángulos inscritos, es fácil contarlos (n) y deducir de allí (también por generalización constructiva que la suma de sus ángulos valdrán semicírculos. Sólo cuando se considera perceptiva y cualitativamente el polígono, no se tiene ningún medio de control sin una medida en grados de cada uno de los ángulos y al confiarse en los datos observables relativos a éstos, no se puede decir nada más importante que lo que dicen los sujetos del nivel IB.

Ahora bien, cosa extraordinaria para un nivel ya operatorio sobre numerosos puntos, estos sujetos rechazan dar respuesta sin más, a la deducción constructiva y conservan los derechos de una generalización inductiva, a partir del pentágono, basada en la idea de un cuadrilátero más un ángulo (o una "pieza" o un "pedazo") estimado cualitativamente. En ANI y DOM la contradicción es también explícita: ANI concluye que la suma de los ángulos del polígono no equivale a la de los semicírculos (triángulo) y llega a decir que "las dos" clases de estimación son justas, de allí una situación sin salida. DOM, a pesar de sus 9 años y 1/2, renuncia a sus generalizaciones, sin embargo fundadas, con respecto a los triángulos.

La razón de estas dificultades es evidentemente que el sujeto, habiendo asimilado ya la relación n triángulos = n semicírculos, no ha comprendido sin embargo, la relación entre el número N de ángulos del polígono y el de triángulos disyuntos que se pueden inscribir allí, que es de N-2. De aquí resulta que para el niño de este nivel, 3 ángulos cualesquiera de los polígonos, equivalen a los de un triángulo y 4, a los de un cuadrilátero: ROG cree lo siguiente: que el hexágono que tiene 6 ángulos sólo se corresponde con 2 triángulos y DOM, que los ángulos de un dodecágono se dividen en 3 cuadrados ya que 3 x 4 = 12.

§/4- EL NIVEL IIB- Como en los dos capítulos precedentes, el nivel IIB señala un acierto en lo concerniente al proceso de la

recurrencia pero no sin haber hecho previas tentativas y sin haber logrado que todas las leyes se hayan resuelto.

CHA (9;5) no está segura que todos los T den un semicírculo, luego lo reconoce en vista de las compensaciones. La misma reacción para los cuadriláteros y el círculo completo. Pentágono: "*1 círculo 1/4 quizá 1/3 mirando el ancho de los ángulos*". Hexágono: "*1 círculo 1/2 quizá un poco más*". Se le sugiere descomponer un trapecio en 2 T y CHA lo aplica al pentágono: "*Serán 3 T, es decir tendremos, estoy* (esta vez) *segura un círculo y medio*". Hexágono: 2 círculos. Recapitulación: "*cada vez que hay un ángulo de más hay un semicírculo de más. -¿*9 ángulos? *-4 círculos, no 3.*"

CLA (9;1) comienza como CHA, pero, para el pentágono, dice inmediatamente: "*un círculo y medio, porque los ángulos son anchos* (irregular). *Un círculo y no del todo la mitad*". Hexágono: "*2 cuartos de más: los ángulos son bastante anchos para hacer un círculo, más 3 todavía 1, es decir, serán 2 círculos.* -¿7 lados? -*No sé*". División en T: el pentágono irregular da esta vez: "*un círculo y medio.* -¿Todas las figuras de 5 lados? -*Sí, estoy segura.* (¿Hexágono?) *Da dos círculos. Si tenemos 1 lado de más podemos agregar siempre un T, es decir, tendremos un semicírculo de más.* -¿7 lados? -*2 círculos y 1/2.* -¿15 lados? -*No sé. Hay que dibujar los T*".

CAT (9;9) generaliza inmediatamente el semicírculo en todos los T y el círculo en todos los cuadriláteros pero rectilíneos, pues "*yo no digo que todas las figuras de 4 lados harán un círculo*" y dibuja como prueba un rectángulo de pequeños lados cóncavos y con 4 ángulos "*muy puntiagudos*". Para el pentágono piensa al principio como en el nivel IIA: "*un círculo y un cuarto de círculo: con 4 ángulos* (= un cuadrado) *tenemos un círculo y con 5 queda forzosamente un cuarto*". Hexágono: "*un círculo y medio: 4 ángulos hacen un círculo, más 2 hacen 1/2 círculo, cada uno 1/4.* -¿Y con 7 lados? -*un cuarto de más.* -¿Y si pasamos de 24 a 25 lados? -*Siempre un cuarto de círculo de más*". Procede, pues, por recurrencia pero olvida el paso de los T a los cuadriláteros. Al contrario, durante la división en T él ve inmediatamente para el trapecio que cada T da un semicírculo, los dos hacen uno entero y tan pronto como el pentágono es dividido en 3 T declara: "*un círculo y medio. He dicho 1 círculo y 1/4, es falso ya que de nuevo hay un T de más.* -¿Con 6 lados? -*3 T, ah, 4 T, es decir 2 círculos.* -¿Por qué? -*De nuevo, cada vez que agregamos 1 lado tenemos un T de más.* -¿con 7? -*Tendremos 5 T y formaremos 2 círculos y 1/2.* -¿con 10 lados? -*Serán 8 T, se necesitan 2 lados para formar un T, quitamos cada vez 2 para tener los T... y cada vez el T vale un 1/2 círculo*".

No tienen problema con los triángulos y con los cuadriláteros. Estos sujetos piensan todavía, como los del nivel IIA, a partir del pentágono: cálculos cualitativos (aún si la respuesta es correcta en CLA), sin idea de división en cuadrados o triángulos. Al contrario, la gran diferencia con las reacciones precedentes es que, tan pronto como se sugiere la descomposición, ésta no sólo se realiza inmediatamente en forma correcta sino también impone la pronta certeza en cuanto a las inferencias que resulten; y el sujeto desvaloriza rápido sus estimaciones anteriores consideradas entonces, como sin fundamento: CHA y CAT son claros al respecto.

Además los resultados obtenidos así dan lugar a una recurrencia explícita con correspondencia entre el número de lados y el de triángulos, es decir, los semicírculos, pero sin la ley "n T = n lados menos 2" en CHA y CLA, mientras que CAT la descubre y se acerca en este punto al estadio III.

§/5- EL ESTADIO III Y SUS CONCLUSIONES: Lo propio de los sujetos de este nivel es pensar por sí mismos en las descomposiciones cuando se acuerdan de sus certidumbres iniciales o simplemente cuando se les pregunta por lo que han "visto en primer lugar". Por otra parte, si la descomposición debe ser sugerida, el sujeto llega por recurrencia a tres niveles de construcción implicados en esta prueba, comprendido allí n-2 triángulos por n lados:

OLI (11;1) precisa que "*todos los T dan la misma suma de ángulos sin excepción*" y que todos los cuadriláteros tienen "*4 ángulos forzosamente*", y que "*si trazamos una diagonal* (lo que indica espontáneamente) *da 2 triángulos*". Para el pentágono "*es simple 1, 2, 3, 4, 5, dará un círculo y un pequeño final de círculo... voy a mirar.* -¿Qué se ve en primer lugar? -*El triángulo, ah. Haremos eso*". Corta en 2 cuadriláteros, luego cambia de opinión (un cuadrilátero y un triángulo). "*Si hago así, bien, esto da un círculo y medio... 3 ángulos y una especie de trapecio... un círculo y medio*". Pentágonos irregulares: "*La misma cosa*". Para el heptágono, sin haber pasado por el hexágono, traza un cuadrilátero y 2 ángulos (olvida el 3er. muy agudo y cuya base es muy corta, la figura ha sido hecha muy irregular), lo que da 3 círculos. Pero aquí hay un error de cálculo y no de método. Para el dodecágono llega a contar por número de ángulos (confusión del nivel IIA entre los ángulos de la figura total y los triángulos inscritos), pero se corrige por una observación que escapa precisamente a los sujetos de los niveles inferiores: que "*ya he separado cada ángulo* (del polígono total), *cada mitad pertenece a otra superficie* (= otro triángulo inscrito) *y este ángulo está* (también) *dividido en 2*".

ASP, (12;8) luego de los primeros pasos vacilantes, comprende enseguida la sugerencia de los triángulos para un trapecio, y frente al pentágono, responde sin dibujar: "*Esto hace un círculo y medio.* -¿Por qué? -*Podemos hacer 3 T dentro* (los muestra). -(Irregular). -*Podemos todavía poner 3 T dentro.* -¿Más? -*No y* (con 1 de menos) *tendríamos una figura de 3 y una de 4 lados.* -(Hexágono). -*Podemos hacer allí 1 T de más, lo que daría 2 círculos.* ¿Y con 7 lados? -*Un lado de más, un semicírculo de más porque habría 1 T de más.* -¿Y con 20 lados? -*En 20 lados habría 18 T.* -¿Por qué 18? -*Observé acá* (pentágono) *que habían 3 T para 5 lados, siempre hay 2 lados de más* (que en el T). -¿Y si pasamos de 20 a 21 lados? -*Un semicírculo de más.* -¿Y con 1000 lados? -*Sería 998 T* (inmediato)".

Así se acaba esta evolución, en forma paralela con la que hemos descrito en los dos últimos capítulos.

Efectivamente, bajo una aparente simplicidad, la cuestión planteada al niño aquí, implica en realidad 3 niveles de construcción recurrente. La primera ley que se pone de manifiesto,

es que, al aumentar de un lado el polígono considerado, aumentamos por esto mismo con su semicírculo la suma de sus ángulos, ya que un lado de más permite la construcción de un triángulo disyunto de más (del cual 1 o 2 están sacados de los del polígono) y que los ángulos de un triángulo valen un semicírculo. Esta primera ley se descubre en el nivel IIA mientras que, en el IB, vemos que BIN afirma que en un polígono tenemos 3 semicírculos, pero concluye que el todo vale sólo uno si nos fiamos, como parece ser, del examen exclusivo de 5 ángulos (lo mismo que en un hexágono, sobre 4 triángulos, los 2 primeros hacen un círculo, los 2 segundos otro, el total es "todo un círculo", ya que hay 6 ángulos). La segunda ley puede parecer abarcada por la primera y aun tautológica: la suma de los semicírculos, dada por el número de triángulos inscritos según las reglas es igual a la suma de los ángulos del polígono total. Ahora bien, esta ley sólo se admite en el nivel IIB mientras que la primera lo era a partir de IIA: para n ángulos del polígono que rodea, sólo tenemos n-2 triángulos disyuntos y estos n ángulos pueden dar lugar a una estimación perceptiva, basada en los simples datos observables cualitativos, los sujetos del nivel IIA sin apoyarse exclusivamente sobre estos 2 últimos (como en IB) continúan tomándolos en consideración: de allí las contradicciones sentidas como tales por ANI, DOM, etc., y de las cuales se escapan como pueden. En IIB, al contrario, la inferencia sacada de los triángulos vence resueltamente. Finalmente, la tercera ley es la de n-2 triángulos por n lados del polígono total, se formula sólo en el estadio III (y más precozmente por CAT, intermedio entre IIB y III pero al final del interrogatorio), pues supone las dos primeras y además una abstracción hecha a partir de las coordinaciones internas necesarias en la construcción en acción.

El interés de estos hechos radica en mostrarnos de qué manera estas tres etapas recurrentes son tributarias de generalizaciones constructivas y esto más claramente todavía que en los razonamientos estudiados en los capítulos precedentes ya que, en el presente caso, esta forma de generalización está en conflicto abierto, en los niveles IB y IIA con la forma extensiva. En efecto, admitir que se puede alcanzar la suma de los ángulos de un polígono por medio de triángulos disyuntos allí inscritos, es sustituir los datos observables directos, dados y calculados perceptivamente a la vez, por un juego de construcciones tal, que se introducen en el objeto, por inferencias sucesivas, nuevas formas y nuevos contenidos, para sacar de allí deductivamente lo que se podría y debería haber hecho intuitivamente.

Se comprende la indiferencia de BIN (IB) cuando se le propone

este ejercicio sofisticado y la turbación de ANI y DOM en presencia de las contradicciones que esto implica en relación al sentido común, que es todavía para ellos la simple generalización inductiva a partir de lo observable.

En cuanto a saber por qué esta generalización constructiva es aceptada y luego utilizada más o menos espontáneamente en los niveles IIB y III, es evidente que en este caso, como en los comentados anteriormente, la influencia progresiva de la necesidad lógica, lleva a los progresos de una toma de conciencia que termina por alcanzar las coordinaciones internas de la acción. Esto es lo que claramente aparece cuando CAT justifica la 3a. ley: "se necesitan 2 lados para formar un triángulo (caso de los dos triángulos extremos en el abanico de aquellos que parten de un mismo vértice del polígono a calcular), quitamos cada vez dos".

Señalemos finalmente cómo y de qué manera notable estos hechos confirman lo que ya hemos visto a propósito de la recurrencia: que la certidumbre inherente a esta forma de generalización no se debe únicamente a simples extensiones de comprobaciones hechas sobre los números iniciales n (como sería el caso de una "inducción" de física elemental) sino que se justifica sólo cuando se apoya sobre lo que sigue, es decir, sobre el paso de n a n + 1 y a "todos" los n + x ulteriores (de allí el término de inducción "completa" usado por Poincaré). Efectivamente, hasta el nivel IIA el sujeto por más que sepa que los ángulos de un triángulo valen un semicírculo y los del cuadrilátero un círculo entero, no ve ni por asomo que esta diferencia de un semicírculo, cuando se agrega un lado o un ángulo, pudiera servir para resolver las cuestiones ulteriores de los pentágonos , etc., y cuando se le sugiere la visión en triángulos, los sujetos del nivel IIA comprenden bien que se puede agregar así, cada vez un semicírculo de más, pero rechazan usar este hecho para juzgar los ángulos del polígono total mismo. Sólo al encontrar el nivel IIB la razón del paso de n a n + 1, es cuando la recurrencia puede ser posible y en el estadio III, llega a ser explícita, pero apoyándose en secuencias ulteriores tan lejanas como 998 triángulos para 1000 lados (ASP). En una palabra, el razonamiento recurrente es un ejemplo típico de la generalización constructiva al basarse sobre estructuras todavía por construir y no sólo sobre las construcciones iniciales.

CAPITULO VI
EL ALARGAMIENTO DE LOS PERIMETROS

con A. Bullinger y P. Mengal

Hemos visto, al concluir el capítulo IV, que hay que distinguir dos formas de generalizaciones extensivas, funcionalmente continuas pero discontinuas estructuralmente: la primera se ocupa de generalizar (pero sin necesidad ya que hay una simple "inducción") en nuevos objetos dados en las experiencias, las propiedades igualmente dadas en los datos observables anteriores; la segunda, que está subordinada a las generalizaciones constructivas, consiste en determinar la extensión de las clases o relaciones cuya comprensión está construida deductivamente, siendo determinada esta extensión en función de los contenidos engendrados (o simplemente enriquecidos si son físicos) por una deducción en comprensión. La presente investigación se refiere esencialmente a las relaciones entre la comprensión y la extensión lo que lleva concretamente a la cuestión, fundamental para todo estudio de la generalización, de determinar sobre qué índices se basa el sujeto para establecer las regularidades y de qué manera se llegarán a diferenciar los índices pertinentes de los otros.

El problema elegido para esta experiencia es muy conocido: ¿por qué se obtiene la misma diferencia entre dos circunferencias en tanto que perímetros, cuando se alarga, por ejemplo, 1 cm. el radio de un círculo, cualquiera sea su tamaño? Esta relación de equivalencia o de constancia, es difícil comprender porque estamos irrefutablemente llevados a razonar en términos de proporciones (en función del tamaño o superficie de los círculos variables) aun cuando no se ha modificado en $2\pi r$ más que el radio r, quedando constante 2π, de tal manera que la relación permanece adicionada y de ningún modo proporcional. Al no quedar la cuestión resuelta para la mayoría de los adultos, hemos buscado simplificarla utilizando cuadros cuyo perímetro es más fácil calcular que $2\pi r$. Tendremos así para cuadrados de 1, 6, 10, 100 y 1000 cms. de lado y de un crecimiento de 1 cm. sobre todo el contorno, es decir en cada extremidad de un lado:

Perímetro inicial (en cm)	4	24	40	400	4000
- final (= 1 lado + 2 cm)	12	32	48	408	4008
Alargamiento	+ 8	+ 8	+ 8	+ 8	+ 8

Esto es lo que los sujetos del estadio III llegarán a explicar.

El material utilizado consiste en discos de diferentes diámetros, sobre los cuales se ajustan coronas metálicas (alambre de estaño) de ancho constante, representando cambios alrededor de un jardín. Cuadrado de 1, 4, 6, 10 cms. de lado se presentan (antes o después de los círculos) con marcos de ancho idéntico (iguales a 1 cm). Finalmente un rectángulo y su marco.

Se presenta la figura elegida entre una serie y se construye el perímetro. Una vez quitado el alambre, se muestra el aumento de tamaño por medio de un taquete puesto alrededor de la figura. Se pregunta si el perímetro inicial es suficiente para rodear la nueva figura y se prevé la longitud de la diferencia con el perímetro final. Se construye la parte que falta y luego se pasa a las figuras más grandes o pequeñas anticipando el tamaño de los agregados y explicando antes y después de la comprobación. Finalmente, se interroga al sujeto sobre los objetos redondos o cuadrados no manipulables (mesa grande, un jardín grande, la luna, etc.,) y sobre las diferencias de agregados constantes entre los círculos y los cuadrados.

§/1- EL ESTADIO I- En el nivel del punto de partida habitual IA, la experiencia no tiene significación porque los sujetos no conservan suficientemente las longitudes para aceptar que un alambre (la corona) conserve su medida según sea recto o curvo:

ANA (6;2) "*No, no son la misma cosa* (grandes). -¿No son los mismos? -*Sí, son los mismos.* -¿Por qué? -*Los dos son pequeños*".

Al contrario, en el nivel IB la no-conservación probable (o real cuando se plantea la cuestión) no presenta obstáculo. El sujeto cuenta naturalmente con los agregados cada vez más grandes pero cuando ve que esto no es real se vuelca más o menos a la falta observable de toda generalización constructiva:

CAR (6;6). Jardines cuadrados: esto fue dicho en cada agrandamiento de la superficie: "*Esto* (la barrera) *será demasiado pequeño porque es mucho más grande que antes*". Luego "*será demasiado pequeño porque se agregó todo el camino*" etc. Pero frente a los hechos: "*va justo.* -¿Por qué faltaba el mismo pedazo? -*Quizás se necesitaba el mismo pedazo* (más asombro)". Pasamos a los jardines redondos: "*Hay que agregar un pedazo, siempre agregar pedazos*". Se hace comparar los agregados iguales: "*sí, es la misma cosa, creo.* -¿Cómo lo sabes? -*Pienso* (que es) *siempre igual. No, creo que es más grande para el círculo grande*".

MIC (6;3) las mismas reacciones pero luego de una tentativa: "*Son del mismo tamaño*". La siguiente suposición: "*Será demasiado pequeño, quizá, pero no estoy segura... porque lo que había antes era del mismo tamaño. Ahora es casi lo mismo.* -

Trata de explicar. -*Entiendo solamente cuando se lo rodea... Se agrega siempre el mismo tamaño porque es el mismo tamaño de alambre*".

ISA (6;9) prevé sin interrupción los agregados que aumentan y luego de comprobar: "*no, es la misma cosa*". -¿Por qué siempre el mismo pedacito? -*Porque va por todos lados*".

CED (7;4) lo mismo, luego de las falsas suposiciones: "*siempre el mismo pedazo porque da el largo justo para llegar hasta el otro* (el viejo y nuevo perímetro)".

No es el hecho de que el sujeto cuente con agregados crecientes lo que constituye la originalidad de esas respuestas, ya que esta previsión se encuentra hasta en IIB: es la rapidez con la cual el sujeto se inclina frente a los hechos sin sorpresa, como si esta constancia de los agregados fuera evidente cuando se encuentra un pedazo, que como dice ISA "va por todos lados". Pero esta sumisión a los observables tiene sin embargo sus límites, pues si MICA pasa de dos o tres comprobaciones prudentemente circunscritas ("entiendo solamente cuando se lo rodea") a "siempre" por una generalización extensiva ignorando manifiestamente la fragilidad lógica de la inducción, COR, al contrario sólo generaliza la constancia de los agregados en los perímetros cuadrados. Piensa a la inversa para los círculos y, en el momento de decir "siempre", se retracta y deforma lo observable. En cuanto a la explicación, ella queda admirablemente circular, como en toda generalización puramente extensiva, donde la comprensión se limita a la lectura de observables no construídos, sino simplemente clasificados o reunidos: es el mismo agregado porque es el mismo tamaño del alambre (MIC) o el mismo intervalo a completar (CED).

§/2- EL NIVEL IIA- Aun cuando las respuestas del nivel IB expresen globalmente las interacciones entre el sujeto y los objetos, dicho de otro modo, se restringen al resultado de los actos (ver los grados de la toma de conciencia en los capítulos precedentes), el nivel IIA, como de costumbre, se caracteriza por centrarse sobre las etapas o manipulaciones sucesivas de la acción, con resultados pero sin alcanzar las coordinaciones internas, es decir, las razones necesarias. De ello resultan dos actitudes cuando se desmiente la suposición general según la cual todo aumento de superficie implica el del perímetro y éste el del agregado: o bien los sujetos muy sorprendidos renuncian a comprender la constancia de éste, o lo explican por otra invariante que es el "espesor" del cordón ("ancho del camino").

Ejemplos del 1er. tipo que se pueden considerar como intermediarios entre los niveles IB y IIA:

IVA (6;10) al pasar del disco 7 al 13: "*es necesario un pedazo más grande que el pedazo de antes porque el círculo es más grande.* (EXP)[17]. -¿Puedes explicarlo? -*Pienso que es la misma cosa porque los dos grandes alambres son del mismo tamaño, entonces los pedacitos serán iguales... No, no podemos decir: son los mismos, es muy chistoso porque el círculo es más grande, no lo podemos explicar*". Pasamos al disco 1, e IVA queda estupefacta al encontrar el mismo agregado: "*No, no entiendo, me causa gracia*". Cuadrados: generaliza: "*siempre es el mismo que debemos agregar.* -¿Por qué? -*Eso es lo que no sé.*" Al contrario si "*los pedazos del cuadrado son más grandes* (es) *porque los redondeles no son tan grandes*", hay entonces una vuelta a la referencia no pertinente de la superficie.

PIE (7;9) Círculos 2 a 3: expresó espontáneamente que las coronas o caminos: "*tienen el mismo espesor*" lo que anuncia el tipo II, PIE no prevé un agregado más largo porque "*éste* (círculo 3) *es más grande.* (exp) -¿Por qué? -*No lo sé.*" Círculo 1. Luego de una falsa suposición: "*Es igual.* -¿Por qué?. -*No lo sé;* -¿Los 3 caminos tienen el mismo ancho? -*Quizá sea verdad, pero no hay que mirar el espesor: la longitud es la que cuenta.* -Entonces, ¿por qué el mismo pedazo? -*No lo puedo decir, no lo sé*".

JOS (8;7) "*Hay* (círculos) *grandes, medianos y pequeños y* (los agregados) *son siempre los mismos, no entiendo*".

NAD (8;5). Cuadros de 2 a 3: "*Es necesario un pedazo más grande*" etc., "*son iguales.* -¿por qué? -*No lo sé: Un* (cuadrado) *es más grande, el otro más pequeño, entonces... No sabría explicarlo.* -Un niño me dijo que es a causa del mismo ancho de los caminos. -*Sí, pero hay uno grande, uno mediano y uno pequeño. Lo que es importante es el alambre que se le pone antes* (perímetro inicial): *para el grande no se pone más* (perímetro final) *y para el pequeño menos*". Pero esto no explica lo constante de los agregados.

HER (9;8) a pesar de su edad dice: "*No sé... Es suerte.* -¿No hay regla? -*No*".

Los casos claros del nivel II A todos invocan el ancho de la corona. Sólo que esto no es una explicación sino simplemente la relación del invariante "agregado" al otro invariante de "espesor" comprobado en el curso de las secuencias de acciones y que permanece ligado a éstas, de allí la ausencia de la generalización para los objetos no manipulables que se manifestará en el nivel IIB.

PAC (7;0) Círculos 1 a 2, luego 2 a 3: "*Se necesita más grande* (barrera: perímetro 2), *2 veces más grande*" luego: "*se necesita uno pequeño* (2) *y un gran pedazo* (3) *para agregar*". Luego comprueba la constancia. -"¿Por qué? -*Porque es el mismo pedazo que falta, porque es el mismo espesor aquí y y allá*".

Y PAT (7;2) suposiciones basadas en las superficies (muestra el diámetro de los círculos luego se sorpende de la constancia: "*Oh, son* (los agregados) *iguales. Es chistoso, se agrega uno grande* (perímetro final) *y aquí uno pequeño.* -¿Entonces? -*Los dos alambres* (perímetros iniciales) *son los mismos* (comparación). *No, no son iguales.*

[17] Exp. = comprobación luego de la experiencia.

-¿Entonces? *-Porque es el mismo espesor. Esto es siempre igual porque es el mismo espesor.*" Al contrario: "¿En un gran círculo funcionaría así? *-No, no en uno muy grande.* -En un gran jardín ¿qué habría que agregarle si se le agrandara en el mismo ancho?. *-Un gran pedazo.*"

DEN (8;9) las mismas reacciones y aceptación final de la constancia de los agregados "*porque es el mismo ancho del camino*" pero, "*no será suficiente*" para un gran círculo por tierra con el mismo "*ancho del camino*".

CRI (8;6) describe minuciosamente todas las etapas de las acciones ya efectuadas y conluye: "*se notó con los alambres que el circulito tenía el alambre más pequeño y el círculo más grande el más grande,* (pero) *se vio que los bordes son los mismos*", y la razón es "*que el espesor* (muestra el ancho del marco) *es siempre la misma cosa*".

JOS (9;2) da a entender por qué esta articulación de las acciones lleva a aceptar la constancia de los agregados reuniendo los perímetros sucesivos: "*Se ha puesto uno más grande aquí que allá* (círculos medio y pequeño) *y se ha agregado el mismo camino, entonces es el mismo pedazo.* -¿Por qué el mismo? *-Es el mismo camino, ha sido necesario el mismo alambre para éste que para el pequeñito, entonces aquí* (diferencia de los dos) *éste será el mismo pedazo*". Tentativa sobre el cuadrado de 10 x 10 luego de una buena suposición: "*es el mismo pedazo.* -¿Por qué pasa esto? *-El camino es siempre el mismo.* -¿El mismo qué? *-No tienen los mismos jardines.* -¿Entonces los mismos qué? *-Los mismos anchos.* Lo que hace que se tenga "*siempre los mismos pedazos*".

CEL (9;6) reaccionó como los dos anteriores y está, por lo tanto, cerca del nivel IIB caracterizado por la suposición correcta de los agregados para los círculos o cuadrados muy grandes pero sus vacilaciones reveladoras, lo sitúan todavía en IIA: "*Siempre será el mismo pedazo porque es el mismo ancho del camino.* -¿Tiene algo que ver? *-Sí, siempre es el mismo, es importante.* -¿Y por qué el pedazo no es el mismo para el cuadrado que para el círculo (donde existe el mismo ancho)? *-A causa de las esquinas, de los rincones.* -¿Y si tengo un cuadrado grande como la mesa será necesario un pedazo como los otros? *-Ah, no. Pero uso el viejo alambre* (cf. JOS). *Entonces está bien, sí... Oh, no, es necesario un pedazo más largo.* -¿Por qué? *-Porque la mesa es más grande No.* -¿Entonces?...".

RIC (10;0) lo mismo: "¿Todos los pedazos agregados son iguales? *-Sí.* -¿Y si tomamos un gran campo circular? *-Hay que agregar 7 veces el ancho de la corona.* -¿Y para un campo muy grande? *-Mucho más: un pedazo 100 veces más grande que nuestro agregado*".

Estas reacciones presentan todas un cierto interés por la cuestión de las formas inductivas y constructivas de generalización. Se comprueba primero que, desde los casos intermedios hay contrariamente al nivel IB una toma de conciencia de las secuencias sucesivas de la acción: IVA nota ya que "los dos grandes alambres son del mismo tamaño", es decir, interviene una suerte de iteración en los perímetros cosa que NAD precisa: "lo que es importante es el alambre que ponemos antes". Pero la contradicción que resisten

vivamente entre el crecimiento de las superficies (que debería, en su mente, provocar un aumento correlativo de la longitud de los perímetros) y la constancia de los agregados los deja sin explicación, de allí el carácter puramente extensivo de sus generalizaciones.

En los casos claros de este nivel, se insiste cada vez más abiertamente sobre la imbricación de los perímetros, que hace aceptable la igualdad de los agregados ya que, como vemos en la fórmula de PAC (7;0) JOS y CEL (9 años), "es el mismo pedazo que falta". Pero esto no es más que un desplazamiento del problema que conduce por cierto a ese progreso notable de disociar los crecimientos respectivos de la superficie y del perímetro y de centrar el sujeto sobre las diferencias entre perímetros sucesivos. Sólo falta justificar la igualdad de estas diferencias, es decir, lo constante para cada uno de las dos clases de objetos redondos o cuadrados. Aquí interviene el ancho, al permanecer siempre el mismo y jugando en consecuencia un papel "importante" dice CEL atinadamente (como si viera en esto una condición necesaria pero no suficiente todavía).

Efectivamente, esta causalidad atribuida al ancho permanece en este nivel con una naturaleza difícil de interpretar, ya que el sujeto mismo no precisa qué relaciones establece entre este "espesor" y la longitud del agregado que posee otra dimensión. El sujeto CEL es el más próximo en esta segunda etapa a la solución cuando dice que el agregado necesario para los cuadrados es más largo "a causa de los rincones", pero la mejor prueba que esto no es suficiente es que este sujeto como todos aquellos de este nivel, no comprende que si el ancho constante da cuenta verdaderamente de la invariabilidad de los agregados, un gran cuadrado "como la mesa" o un "redondel muy grande en la tierra" conllevarán los mismos agregados si (precisamos) se los rodea del mismo "ancho de camino". Esta ausencia de generalización cuando no se procede por acciones materiales sucesivas, con iteración de la misma diferencia o al menos imbricación de perímetros similares muestra bastante bien que la "explicación" por el ancho de la corona no es, de hecho, más que una correlación entre dos regularidades comprobadas, es decir, una ligazón entre constancias observables pero en tanto que observables debidos a la sucesión de las acciones y no como coordinaciones necesarias ya que la aparente necesidad (porque) se desvanece en el momento en que sale del dominio de los objetos manipulables. Se trata todavía de una generalización esencialmente inductiva que intenta dirigirse hacia la forma constructiva, pero sin la última etapa de toma de conciencia de las coordinaciones que sería indispensable al respecto.

§/3- EL NIVEL IIB- El gran progreso realizado por los sujetos de 9-10 años promedio (pero algunos hasta de 11-12 años, así como el nivel IIA puede extenderse hasta casos de 10-11 años) es la generalización a los objetos no manipulables:

RIN (8;2) permanece en el nivel intermedio entre IIA y IIB. Ella espera encontrar un agregado más grande para un "*gran jardín*" circular. Luego de la comprobación: "*son la misma cosa porque es el mismo ancho del camino.* -Pero el camino es más largo, entonces ¿por qué el mismo pedazo?. Explica un poco. -*Es el mismo ancho*". A continuación: "Si se toma un jardín muy grande será necesario un pedazo como éste (más largo)? -*No.* -¿Cómo? -*Como éste* (el mismo que antes). -¿Aun para un gran jardín? -*Sí*".

Al contrario, para los cuadrados ella prevé una variación de agregados, luego comprueba la constancia "*porque es el mismo ancho*". "¿Por qué no es el mismo pedazo que con los círculos? -*No es la misma cosa: círculos y cuadrados.* -¿Y alrededor de un campo de futbol? -*Dos veces esto, porque es un poco grande* (ella vuelve a referirse a la superficie en oposición a la forma)".

COL (9,3) comprueba, luego de falsas suposiciones, la igualdad de los agregados: "*Porque acá había que agregar 3.* -¿Y si le damos vuelta a un carrusel? -*Hay que agregar 3.* -¿Y la vuelta a la luna?- *Hay que agregar 3.* -¿Y con un redondel muy pequeño? -*3.*" -Pero cosa curiosa se retoman los redondeles a partir de los cuales se construyeron, con los sujetos, los perímetros, COL espera un agregado más largo para el más grande y luego explica su error: los pedazos son los mismos: "*porque estaban plegados, antes yo creía que los habían abierto más*", lo que es el comienzo del paso del ancho al largo. "¿Y para la luna? *Más, no, será la misma cosa*".

RAT (10;6) luego de falsas suposiciones: "*Es el mismo pedazo porque es el mismo espesor.* -¿Y con un cuadrado muy grande? -*Le falta el mismo pedazo.* -¿Y alrededor de la mesa? -*El mismo pedazo.* -¿Con cualquier cuadrado funcionaría? -*Sí.* -¿Y si ponemos 2 caminos a la vez? *Tantos pedazos como caminos*". Círculos: espera encontrar el mismo agregado, luego: "*porque no hay más ángulos. Y no están los 4 lados: antes hacíamos virajes.* -¿Y un triángulo? -*Más grande que el círculo y más pequeño que el cuadrado*".

SER (11;0) "*Es el mismo tamaño porque es el mismo ancho que se ha juntado.* ¿Sobre un gran prado circular? -*El mismo pedazo porque ya está todo el alambre que lo rodea: hay que agregar un mismo pedacito.* -¿Alrededor de la luna? -*Un pedazo igual*". Cuadrados: "*Un poco más grande porque hay 4 lados y en el círculo uno solo*".

ISO (12;2).2do. cuadrado: "*Los mismos, siempre es 1 cm. de ancho.* -¿Pero este cuadrado es de 4 x 4 y más 1 x 1? -*Sí, pero es el mismo ancho. Antes teníamos un alambre que daba el perímetro y luego agregamos 1 cm. de ancho, es decir igual. Y alrededor de la mesa siempre 1 cm.*".

Con estos sujetos estamos muy cerca del paso del ancho constante al largo del agregado, este ancho se traduce en largo de los lados cuando el camino da un giro a ángulo recto. RIN todavía no ha llegado a eso y permanece en parte con la idea de la superficie pero

COL al hablar de los pedazos "plegados", RAT con los "virajes" y SER como ISO con los "lados" del cuadrado están próximos a la explicación, que alcanzan de manera implícita: su toma de conciencia de las acciones se une casi con las coordinaciones intrínsecas necesarias, pero, una vez más, hay que alcanzar el nivel de las operaciones "formales" de 11-12 años para obtener estas explicaciones y esta necesidad incluso con las anticipaciones correctas desde el comienzo.

§/4- EL ESTADIO III.- Ejemplos:

FRA (11;5) 1er. cuadro presentado (4 x 4): "¿Puedes saber qué pedazo falta?. -*Eh... alrededor de 8 cm y para un lado 2 cm más ya que hay 1 cm de cada lado y hay 4 lados: entonces 4 × 2 = 8.* -¿Seguro? -*Sí.* ¿Y éste (cuadrado de 1 x 1 cm)? -*Hay que agregar también 8 cm, es igual, se agregó 1 cm todo alrededor.* -¿Un cuadrado grande? -*El mismo pedazo.* -¿Alrededor de la mesa grande? -*Siempre 2 cm en todas las esquinas. Es lo mismo para todos los cuadrados y rectángulos*". Para los círculos: "*Acá, es difícil, hay 1 cm más, habrá que hacer 3.14 que es la relación : lo que hace 2 veces 3.14 es decir 6.28.* -¿Por qué esta diferencia? -*Los ángulos ocupan espacio, las curvas son más cortas*". Triángulos: "*Hay algo que falla, esto depende de los ángulos: si es uno recto quiere decir 2 cm. si es agudo será más y un obtuso menos*".

PHI (11;9) comienza por anticipar "*un pedazo que sea 4 veces como éste* (1 cm) *porque es el tamaño de eso* (ancho del marco) *y hay 4 lados*". Tentativa. "*No, esto no va, hay que tomar 8 veces el ancho. El lado aumentó así y así* (las dos extremidades). *Yo agarro un alambre grande y le doy la vuelta a la mesa. Quiero alejarlo 1 cm todo alrededor. Debo agregar un pedazo* -¿cómo?. -*8 veces más que el otro. No, sí, eso será suficiente, es lo mismo*". Círculos: "*La misma cosa.* (Tentativa). *No. en el cuadrado hay ángulos que ocupan lugar y eso lleva alambre.* -¿Alrededor de la luna será suficiente ese pedazo? -*Sí*".

ALA (12;3) 1er. cuadrado presentado (4 x 4): "*Está más grande, los lados aumentaron 1 cm, faltan 4 cm.* (Tentativa.) *Ah no... 1 cm aquí y 1 cm acá* (las dos extremidades)". Cuadrado de 1 x 1 cm: "*Hay que agregar 8 cm.* (¿Cuadrado de 10 x 10?) -*Siempre es 1 cm, hay que agregar 8 también*". Círculos: prevé un agregado más grande: "*Porque el círculo tiene más superficie.* (Tentativa) *Ah, menos, porque el cuadrado tiene 4 ángulos y se agrega 1 cm sobre todos los lados. Si desplegamos la circunferencia da una línea recta, el cuadrado también pero es más largo por los ángulos*". Gran Círculo: vacilaciones, luego: "*agregamos siempre lo mismo*". -¿Y si pongo una 2da. corona? -*Será el mismo pedazo* (para la segunda que para la primera). -¿Y alrededor de la luna, será suficiente este pedacito? -*Sí* (sin dudar) *pero es un poco raro*".

DEN (12,9) "¿Y será igual para una gran mesa redonda? -*Sí, evidentemente.* -¿Y para la luna? -*Es lo mismo, sí, es igual para cualquier tamaño*". Estos sujetos preveen pues, antes de toda tentativa la constancia de los agregados y la generalizan "para cualquier tamaño" dice DEN, tan "raro" como lo piensa ALA igual que los adultos no geómetras. Esta anticipación inmediata tiende naturalmente a una interiorización de las acciones que no se limita a retrazar las secuencias temporales, sino que alcanza

las coordinaciones necesarias de las que dependen, finalmente, la explicación correcta del papel del "ancho" de la ruta, que se traduce por un alargamiento de 1 cm en cada extremidad de los 4 lados del cuadrado, es decir 8 cms.

Esta generalización basada sobre la "razón" de la regularidad es de un tipo resueltamente "constructivo" con todas sus características distintivas. En primer lugar, no se trata más de una repetición de observables, ya que el agregado está calculado antes de la comprobación y que su constancia es deducida: las figuras en juego, con sus perímetros iniciales y finales, etc., están así promovidas al rango de objetos conceptuales, y por esto mismo (segunda característica) de formas que engendran sus propios contenidos posibles, más allá de los contenidos materiales proporcionados por la experiencia. De allí, en tercer lugar, una modificación completa del papel de las extensiones. Efectivamente, la generalización de los niveles precedentes permanece, antes que nada, extensiva, en el sentido de un paso probable o quizás muy probable de "algo a todo" pero, según una regularidad que en cierta manera, es putativa y que tiende a la simple reproducción posible de las mismas condiciones de observación. Al contrario, la generalización en extensión de la forma "igual para cualquier tamaño" (DEN) ya no constituye una "inducción" basada en la experiencia sino la consecuencia *necesaria* de la demostración previa que está en comprensión. La extensión se fusiona con la generalización de los contenidos por las formas, lo que es otra cosa.

§/5- CONCLUSIONES.- Volvemos a los problemas del comienzo, en cuanto a las relaciones entre la extensión y la comprensión. Si comenzamos por esta última se comprueba una evolución significativa en la elección de los índices, según orienten primero las suposiciones y luego las reacciones a ese observable imprevisto (hasta el nivel IIB incluído) que es la constancia de los agregados. En cuanto a las suposiciones, el índice inicial es el "tamaño" del objeto sin diferenciación entre el perímetro y la superficie, es decir un observable global que lleva a anticipar un agregado correlativamente creciente. En el estadio II (y IIB como IIA) el largo del perímetro es lo que se puede observar todavía, pero concebido indebidamente (por un factor constructivo incompleto) como proporcional a la superficie del círculo o del cuadrado, y dando lugar, de nuevo, a falsas suposiciones. En el estadio III, al contrario, el 1er. índice que sirve a las anticipaciones es el perímetro, disociado de la superficie, pero un índice que supera las observables o las enriquece al tratar de calcularlo, es decir de

construirlo deductivamente y no sólo de registrarlo perceptivamente. En los factores o índices invocados a título explicativo luego de las comprobaciones, encontramos la misma evolución de una "comprensión" extraída de las únicas propiedades observables a una comprensión deducida por construcción.

En el estadio I, la nueva observable está aceptada pero es "raro" e inexplicable. Al contrario, en el estadio II un índice pertinente se descubre y se invoca constantemente: el "ancho" del camino, que permanece también constante y aparece por esto como explicativo. Solamente, como se ha visto, no hay acá sino una relación legal y no causal todavía, a pesar de las apariencias, entre 2 constancias observables, sin la explicación del paso del ancho al largo: de allí de nuevo una generalización que permanece esencialmente inductiva o extensiva, limitada a los objetos manipulables en IIA, extendiéndose a los otros en IIB pero, aun sin que el mecanismo sea explicitado. Al contrario, en el estadio III este ancho constante del camino que sirve tanto a las suposiciones como a las explicaciones llega a ser explicativo porque está inmediatamente integrado en una deducción del largo de los lados: en este caso las propiedades en comprensión superan las observables, llegando a ser así productos de construcción o de reconstrucción, lo que modifica su status al introducir allí la parte de necesidad que le faltaba hasta ahora.

Comprendemos así la dualidad fundamental que interviene en la evolución de las extensiones.

Hasta el nivel IIA incluido éstas son independientes de las construcciones subyacentes: permanecen inductivas y en la medida en que el sujeto las crea necesarias, esta seudonecesidad putativa no es más que un producto de la generalización extensiva, por esto es que se confirma. Con el nivel IIB se extiende a los objetos no manipulables, lo que constituye un progreso importante y significativo que anuncia el estadio III. En esta etapa final, efectivamente la situación es invertida: en adelante la significación en comprensión que, al introducir una necesidad auténtica, rige la extensión es, el carácter necesariamente invariante de los agregados que llegan a ser ipso facto, "siempre" constantes (FRA) o "igual para cualquier tamaño" (DEN).

No es exagerado, pues, rechazar la consideración de la extensión de las generalizaciones constructivas como derivando estructuralmente de las generalizaciones inductivas o puramente extensivas anteriores: por más continuas que sean desde el punto de vista funcional (como lo muestra el nivel IIB), testimonian en cuanto a su estructura lógica toda la diferencia que opone lo endógeno a lo exógeno. Dicho de otro modo, el desarrollo en juego no

consiste en una interiorización de lo exógeno en lo endógeno sino (y esto en virtud de la interiorización propia de la toma de conciencia en la dirección de las coordinaciones intrínsecas de la acción, lo que no es lo mismo) constituye un reemplazo progresivo de lo exógeno por lo endógeno, lo que testimonia, por otra parte toda la historia de la geometría y en buena parte de la física.

CAPITULO VII
EL CAMINO MAS CORTO ENTRE DOS PLANOS PERPENDICULARES

con Cl. Voelin y E. Rappe du Cher

El problema estudiado en esta investigación se refiere al de las diferenciaciones e integraciones propias a las generalizaciones constructivas. En este caso particular, se tratará de encontrar el camino más corto entre un punto situado en un plano horizontal (el suelo de un jardín donde se encuentra una lechuga) y un punto situado en lo alto de un plano vertical (una pared sobre la cual hay un caracol). Se trata de saber si el camino más corto es una recta, lo que sólo es evidente al empalmar los 2 planos.

Pero vemos que, en este caso, la generalización consistirá más en buscar mantener la extensión o en explicar sus excepciones si el sujeto se cree obligado a admitirlas, que en acrecentar la extensión de la ley. El problema de la generalidad de esta ley en la situación que se estudia aquí suscitará una serie de cuestiones particulares de diferenciación y de integración, o de preintegración, y aun una curiosa cuestión de conservación que consiste en saber si un trayecto vuelto horizontal por la proyección de los 2 planos tiene la misma longitud que antes (isotropía del espacio euclidiano).

La técnica es muy simple y se aplica sobre todo en las dos situaciones siguientes.

I) Sobre una hoja de papel que imaginamos el jardín ponemos la concha de un caracol y una hojita de lechuga en diferentes posiciones, paralelas o no, a los bordes y el sujeto debe indicar el "camino más corto".

II) El mismo problema, pero sobre los dos planos perpendiculares de un cartón plegado. La lechuga ocupa un rincón del jardín y el caracol está sobre la pared hacia el lado opuesto (de allí un trayecto oblicuo).

III) Nos servimos además, de una caja de cartón sin tapa de bordes altos, planteando las mismas preguntas.

IV) Terminamos las preguntas utilizando la sala de experimentación: se le pide al sujeto imaginar al caracol en un rincón elevado e indicar el camino más corto para alcanzar la lechuga sobre el suelo (en posiciones variables, como antes en II y III). El orden I, II, III, IV permanece constante. Cuando los sujetos no mencionan espontáneamente la posibilidad de proyección frente a la pregunta de qué "hacer" para estar seguro de que el camino indicado es por cierto el más corto, se le sugiere y se le efectúa según sea necesario.

§/1- EL ESTADIO I: Las nociones iniciales (nivel IA) del camino más corto conllevan dos aspectos de los cuales, ni uno ni otro, son cuantitativos todavía: el del esquema de acción, que es direccional y correctamente orientado hacia el objetivo y el de la representación donde "el más corto" se confunde con el más simple perceptivamente (seguir los bordes del campo) o topológicamente (vecindades). También vemos para la situación I, tanto curvas como rectas etc., además, cuando se pide acortar estos trayectos el sujeto acerca sin más la lechuga al caracol, etc.

LEO (5;5) para la situación dos indica [18] un trayecto V vertical de x1 a x'1, siguiendo luego en H el borde del cartón en prolongación de V luego girando en ángulo recto para seguir el otro borde hasta la lechuga. Pero ella confiesa que este camino —1— "*es largo*". Para acortarlo dibuja el camino —2—: de x siguiendo horizontalmente el borde superior hasta el frente y bajando V a lo largo de este otro lado para continuar así en H: es pues, el simétrico exacto de —1—. Un camino —3— pasa por las medianas entre 1 y 2 siempre en ángulos rectos y por medio de los dos planos vertical y horizontal. "¿Y otro más corto?" (Ella dibuja el —4—, casi exacto). - "*Haría así* (gesto oblicuo). -¿Cuál es más corto? -*Este* —3—. ¿Y si no contamos con el —3—? -*Este;* 1". La proyección no modifica nada. Situaciones III y IV: iguales reacciones.

LOR (5;11), hay progreso sobre dos puntos. En I comienza por una curva, luego declara que "*hay que hacer un camino recto*". En II, pasa como LEO de x a x" pero de aquí H sigue la diagonal de x' a y. "¿Cómo va este camino? -*Recto y un poco curvo* (el ángulo al pasar de V a H) -¿Se pueden hacer otros rectos? -(Hace un dibujo idéntico al —3— de LEO). -¿Cómo iría una mosca de x a y? - (Muestra un trayecto recto que atraviesa el aire). -¿Y el caracol? -(Dibuja una oblicua casi justa: cf. el 4 de LEO). - ¿Cuál es más recto? -*Este* (el último) -¿Y el más corto? -*Aquel* (dibujo 1)". Situación III: el mismo dibujo.

IVO (6;3) III de x a x' y de la diagonal sobre y (cf., el comienzo de LOR).

Otros ejemplos del nivel IB donde el sujeto oscila entre el trayeto correcto y las soluciones precedentes:

RIC (5;6) comienza por un trayecto correcto: "*Es recto, no curvo*". Se le pregunta por otros caminos y RIC dibuja un 2 con curvatura de un lado y un 3 con ligera curvatura del otro pero muy cercanos a los dibujos x-x' y del nivel precedente, pero cosa curiosa él está seducido por esta solución y cuando se le pregunta por el "camino para caminar lo menos posible" señala el último. "Y cuántos hay que van recto? - *Aquel y aquel* (1 y 3)." Cuando se realiza la proyección muestra el trayecto bueno pero no lo cree igual al volver a la posición inicial.

---

[18] Designaremos por V el trayecto sobre el plano vertical y por H sobre el horizontal, x es la posición inicial del caracol, x' será su proyección sobre el plano horizontal e y la lechuga.

VAL (6;6) lo mismo, comienza por la solución exacta —1— luego dibuja como otro camino posible el trayecto xx'y —2— y también una especie de compromiso entre los dos —3—. Sostiene que —1— *"es el más recto"* particularmente cuando se le pide alcanzar el objetivo, ubicándose desde el punto de vista del caracol. Con la pared proyectada, siempre es —1— el más recto pero con la pared enderezada —2— *"es el más corto"*.

KAR (6;7) enuncia en la situación I dos criterios solidarios para el camino más corto: *"No hay necesidad de hacer un pico (o) un rincón"* y *"no hay necesidad de tener dos líneas"*. Al contrario en la situación II: *"No puedo decidir si son dos trazos o un solo trazo"*, de tal manera que entre las dos posibilidades del trazo único o de xx'y no se sabe ¿cuál es el "más corto"? *"Ninguno"* (Ella dice también: "Los dos son los más cortos, los dos van juntos). Luego se inclina por la solución exacta: *"es 1 solo trazo.* - ¿Puedes probarlo? -*Uno lo hace en un solo impulso."*

PAC (7;0) da en II un solución intermedia entre el trayecto correcto y el camino xx'y. En III la misma reacción, pero agrega: "Quizá sea éste (xx'y)". Con proyección no hay problema, pero cuando la pared se endereza, vuelve a su solución de compromiso.

COR (7;0) comienza por la V = xx' y la H = x'y luego traza un trayecto más directo xy pero un poco ondulado, designa como el más corto al primero a causa de su ascenso xx' luego el segundo *"porque es de un solo trazo"*. Para la pared proyectada es evidente, pero cuando está enderezada *"cambia cuando hay que subir.* -¿Si fuera chato sería siempre el mismo trazo? -*No, ahí cambia"*.Situación III: *"Sin embargo hay que ir a la esquina* (xy') *para poder subir* (x'x) *y eso lo alarga"*.

MAR (7;7) Las mismas dudas y después de la proyección *"esto cambia un poquito.* - ¿Qué? -*Los trazos* (que son dos o llevados a uno). -¿Entonces? -*Cuando la pared estaba acostada, el camino era un poco más corto.* -¿Y levantada sigue siendo el más corto? - *No"*.

Estas reacciones del estadio I muestran claramente la naturaleza de las dificultades encontradas por el sujeto al buscar el camino más corto y conservar la generalidad de una línea "recta"; para resolver este problema se trataría de asegurar dos clases de coordinaciones, una entre las partes del trayecto que están disociadas del hecho de la dualidad de los dos planos de V y H y la otra, entre los puntos de vista posibles sobre el trayecto total. En el nivel IA, la primera de estas coordinaciones es la que falta; el sujeto no se preocupa por este proyecto total y no busca "el más corto" sino en cada segmento por separado.

En esta óptica es evidente que sobre el plano vertical el segmento más corto consiste en pasar de x a su proyección en x' y no trazar una línea oblicua. El caracol luego de bajar verticalmente de x a x' el camino más simple, continúa siguiendo los bordes (LEO) y el más corto adoptando la diagonal x'y (LOR e IVO). Cada uno de estos sujetos es, sin embargo, capaz de imaginar un solo trayecto oblicuo

de x a y (solución correcta) pero si reconocieran con LOR, que este último camino es el más "recto" no sostendrían que el trayecto de los ángulos xx'y es el más corto (o el camino 3) en LEO, de ángulos rectos como 1 y 2, a causa de, evidentemente, la ganancia del acortamiento que se asegura sobre el segmento vertical desdeñando H.

En las reacciones IB el progreso está en que los sujetos no pierden de vista el trayecto total, de tal manera que cada uno de ellos es capaz de dibujar entre otros un camino directo casi correcto. Pero la coordinación que no llegan a asegurar es la de los puntos de vista posibles, que no alcanza a diferenciar con sistema y que quedan simplemente disociados, con pasajes involuntarios de uno a otro sin coordinación de conjunto. Estos puntos de vista diferentes son el 3 o 4. 1) Hay, primero, lo que FRE en el nivel IIB llamará el de "la línea que se sigue con un objeto" es decir el punto de vista del caracol que puede avanzar recto delante de sí mismo si pasa de un plano V a un plano H. 2) Está, luego, el camino que FRE llamará "de vista" y que es el punto de vista proyectivo del sujeto cuando mira los trayectos eventuales. Pero hay todavía que distinguir aquí una forma 2A con enfoque hacia un extremo (de allí la coincidencia posible con 1 y una forma 2B con inspección lateral que pone en evidencia la ruptura o el ángulo de 90 grados entre V y H y la existencia de dos segmentos y no más de un solo trazo como en 2A. 3) Está finalmente el punto de vista métrico de la geometría (euclidiana) que permite considerar el trayecto total como la suma de los segmentos y, en consecuencia, juzgar la recta obtenida por proyección de la pared como igual a la suma de los dos segmentos H y V una vez enderezada la pared: al contrario, en el caso de los puntos de vista 1 y 2, la proyección no prueba nada y, como lo dicen los sujetos precedentes: "cambia cuando hay que subir", (COR y MAR todavía a los 7 años).

Claro es, pues, que las dudas de estos sujetos tienden sin más a continuas confusiones de puntos de vista. Aun cuando la conclusión final parezca justa como en KAR: "el trazo se hace de un solo impulso" (en el ángulo de 90 grados entre V y H) no es más que la expresión del punto de vista 1 (sin la métrica número 3). Por otra parte, la distinción de VAL entre "más recto" y "más corto" (ver también RIC etc.) testimonia las mismas disociaciones sin coordinación.

§/2- EL NIVEL IIA- A los 7-8 años se asiste a un fenómeno interesante si se compara este nivel al siguiente IIB de 9 a 10 u 11 años: un equilibrio momentáneo que parece comprobar a la vez una coordinación de segmentos en un todo métricamente igual a su suma, y de una coordinación de puntos de vista distinguidos al

instante. Pero, al continuar se verá que este equilibrio no es estable y que, al plantearse nuevos problemas, los sujetos de 9-10 años presentarán una suerte de regresión aparente, pero debida, como es tan frecuente en este nivel IIB, a una complejidad mayor en los análisis del sujeto.

BEA (7;0) da inmediatamente en II con el trayecto correcto y dibuja otros dos, uno ondulado y el tercero en forma de xx'y y con el trayecto xx' vertical y un corte en el ángulo recto: "Entre los 3.¿cuál es el más corto? -*El primero* (exacto) *porque el 3o. va hacia allá* (ángulo) *y es necesario un camino más largo hasta allá. El 1o. cruza más lejos*". Ella encuentra esta pregunta "más difícil" que en la situación I (el plano) porque está "el pliegue". Se proyecta la pared: "*el camino 1 es recto.* -¿Y el camino cambia cuando está plegado o desplegado? -*No.* -Cómo queda entonces? -*Siempre igual.* -¿Y la línea? -*Es recta*". Situación III: las mismas reacciones.

AME (8;6) hace los mismos trayectos posibles, el más corto es el "*pequeño y recto*" que encuentra cuando la pared está proyectada, "y si enderezamos la pared, ¿cuál es el más corto? -*Aquel* (exacto) *porque es recto.* -¿Cuando la pared está volteada se puede decir que es recto? -*No, está la pared, esto hace que suba.* -¿Y entonces? -*Si medimos* (el camino) *con la pared enderezada y proyectada siempre es del mismo largo, no cambia de longitud*".

NAD (8;7) dibuja un camino casi correcto y otros dos que hacen ángulos de 90 grados a la izquierda y la derecha: el más corto es el 1o., porque "*es siempre* (todo a lo largo) *directo*". Se sugiere la comparación entre las situaciones I y II y ella misma hace la proyección de la pared y comprueba que su línea era un poco curva y la corrige. Se endereza: vuelve sobre el trayecto corregido precisando que proyectada o enderezada "*es siempre igual*". Idem en III.

JAN (8;8) la misma ligera curvatura corregida después de la proyección volviendo sobre el camino recto una vez que la pared se levantó porque "*no podemos tener dos caminos* (diferentes) *que sean rectos*" y porque "*esto no ha cambiado evidentemente*".

Se ve que estos sujetos comienzan a diferenciar y a coordinar los puntos de vista y lo que es nuevo, sobre todo, es la subordinación a una métrica: "si se mide" el camino con una pared baja o levantada, "es siempre el mismo largo" dice AME, pareciera que no hay más problema. Pero el postulado distintivo del nivel IIA está enunciado por Jan y será cuestionado precisamente en el nivel siguiente: "no puede haber dos caminos diferentes que sean rectos". Esto parece el sumo sentido común y es, en todo caso, la idea más simple pero no tienen en cuenta una posibilidad que los sujetos de 9-10 años, con su necesidad de suscitar nuevos problemas, desprenderán en función de múltiples puntos de vista distintos que buscarán precisamente explicar: que para trayectos diferentes formados por segmentos sucesivos, podría haber eventualmente compensación entre las variaciones de estos últimos. Esta suposición es a primera vista

curiosa, veremos luego que no es el hecho de uno o dos sujetos excepcionales, sino que caracteriza todo un subestadio.

§/3- EL NIVEL IIB: ejemplos progresivos:

LAI (8;8) dibuja variantes alrededor del trayecto correcto y considera a éste como "*no del todo recto, pero si bajamos la hoja, el camino sería más recto.* -¿Y cuando la pared está enderezada, cambia? -*La diferencia está en que nada podría ser la misma cosa cuando está horizontal o vertical.* -¿Entonces? -*Hay que imaginar como si la pared no estuviera allá.* -¿Y cuando está proyectada es la misma longitud? -*Se podría decir que sí, pero no se puede medir de tal manera porque si agregamos todos* (muestra los distintos segmentos) *sería la misma cosa.*" Dicho de otro modo podría haber compensaciones pero sin precisar cuales.

COL (9;3) va más lejos. Entre esos 5 caminos posibles, de los cuales 1 es casi recto (ligera curvatura) y 5 completamente recto. "¿El más corto? -*El 5* (pared baja) *porque va recto.* (Levantamos la pared) -¿No cambia? -*Un poco sí, ya que la levantamos, entonces eso hace que se incline, se pliegue.* ¿Pero para estar seguro que es el más corto? -*Se baja la pared.* (Lo hacemos) -¿Y 1 cómo es? -*También es recto una vez que se la bajó.* -¿Es más o menos largo que el 5? -*La misma cosa*". Se le recomienda entonces mirar bien y él ríe de su error, pero recomienza de la misma forma que en la situación III. "*Si lo pusiéramos recto* (2 caminos poco diferentes) *sería la misma cosa*".

STE (9;6) Situación II: "Cómo podemos saber si uno de los caminos es recto? -*Si la hoja fuera chata, si la pusiéramos recta, veríamos que el número 1 no hace virajes. Los caminos 1 y 3 están próximos uno del otro*". Luego de levantar la pared: "¿cuál es el más corto? -*Es el 3...* -¿Cuál va a tomar el caracol? -*Va a tomar el 3 o el 1.* -¿Por qué los 2? -*Hay igualdad.* -¿Son los dos iguales? -*Sí, si medimos esta parte aquí* (muestra los segmentos sobre el plano horizontal) *y las partes que suben* (segmentos verticales) *son los dos iguales* (compensación). -¿Eso nos ha ayudado a acostar la pared? -*No del todo (...) es 3 el más corto cuando está acostada y 1 y 3 cuando está levantada, cuando está levantada están en igualdad* (nuevo argumento de compensación sobre los segmentos). -¿Y acostada? -*Es 3 el que está más inclinado y entonces es más corto.* -¿Y cuando la pared está enderezada? -*Es 1 el más largo.* -Recién has dicho que los dos eran la misma cosa. -*Pero no. Me olvidé, si los dos están en igualdad*". El mismo argumento de compensación en la situación III. "*El 2 es más corto allá y el 1 es más corto allá, están en igualdad, de nuevo*". Las mismas oscilaciones consecutivas.

FRE (10;5) en la situación III comienza por xx'y diciendo: "*Tomamos siempre el camino que es más recto, de frente.*" Luego da un camino aproximativamente exacto, que juzga como el más corto: "*Allá* (primer camino) debemos atravesar todo y luego debemos subir, mientras que allá vamos justo hacia el medio y luego se sube a pie". Pero duda: "*se necesitaría un centímetro*", luego "¿cuál es el camino más corto? -*Hay dos (...) son los dos misma cosa*". Retomamos el plano 1 trazamos el camino más corto (= el recto) luego plegamos la hoja. FRE propone el equivalente de "diagonal + arista", "*si pasamos por allá, es más corto sólo cuando está plegado.* -¿Los trazos de lápiz cambian de longitud cuando está plegado? -*Sí. Es la misma longitud, sólo cambia de posición*". Volvemos a la habitación (III): "*Hay dos que son iguales* (xx'y el camino aproximadamente correcto); (xx'y) *es más horizontal que vertical y el otro más vertical que horizontal*". Luego traza un 3er. camino entre los otros dos, que

estima igual a los otros dos. Luego de 20 minutos de recreo "*si la hoja es así* (plana) *el más corto es aquel* (recta) *si la doblamos es aquel* (ángulo de 130 a 150 grados). -¿Por qué? -*Cuando la hoja está plegada, la forma no la forma sino donde va, la dirección cambia.* -¿Y aquí (otro dispositivo con o sin proyección)? -*Sobre la hoja* (plana) *el trazo* (el más corto) *es así, si Ud. lo dobla es así* (con ángulos)". Otro dispositivo de 3 paredes:" *cuando lo doblamos el* (trayecto con ángulos) *llega a ser más corto que el otro. Luego: Son* (la recta plegada o desplegada) *de la misma longitud, cuando Ud. dobla esto, da otro forma.* -¿Qué quiere decir 'cambia de longitud'? -*Cambio de recorrido.* -¿Cuántos pasos tendría este camino si una araña lo hubiera hecho? - *120.* -¿Y éste? - *110.* -¿Y si lo plegamos (a 9o.)? -*100 pasos.* -¿Entonces el trazo se acorta? -*Sí, así* (plegado) *el trazo es más largo*". Finalmente encuentra una solución: "*la línea es diferente cuando se la sigue con un objeto, pero a la vista son iguales.* -¿Y cuál es el más corto (doblados) con el objeto? -*Aquel* (exacto) *con el objeto*".

PHI (11;4) encuentra el buen camino en la situación II. ¿"Cómo has hecho para saberlo?... -*como si volara, el mismo trayecto pero por tierra, si pudiera volar sería en línea recta, ahora hace un ángulo*". Responde a otra pregunta con otro camino (xx'y): "*son iguales: en el número 2 toma más tiempo al subir* (...) *gana al subir lo que pierde por tierra* (número 1) (...). -¿Cuál es el camino más corto entre dos puntos? -*Una línea recta.* -¿El caracol puede ir en línea recta? -*Sí, no.* -¿Hay algún medio para ver si el caracol traza una línea recta? -*Acostando la pared.* -¿Se puede hacer? -*Sí.* -¿Y qué da? -*Se puede verificar*". Acostamos la pared. PHI traza la verdadera recta (número 5) pero fracasa en el problema de la araña (como antes FRI) y concluye: "*la línea cambia de longitud cuando está acostada y cuando está parada* (...). -¿Cómo lo explicas? -*Cuando está acostada* (5) *da una línea recta y 1 da una línea curva, cuando está parada —1— da una línea recta y —5— da una línea curva.* -¿Y eso cambia? -*Cambia la suerte de la línea.* -¿Y eso cambia para el caracol? -*Tomará el —5— cuando está acostada y el —1— cuando está parada* ¿Y cambia de longitud? -*No, no cambia de longitud.* -¿Cuál es la diferencia entre las dos? -*Los dos son la misma cosa* (argumentos de compensación). -¿Y para el caracol? -*Cuando la pared está parada —1— es más largo y —5— es más corto, no, es a la inversa...*". Conclusión final: "*son iguales*".

DIA (11;8) cuando y está frente a x' traza una horizontal y una vertical correctas". "¿Cómo podemos saber que el camino es verdaderamente recto? -*Si la pared bajara sería recta*". Para "y" de lado, DIA, traza de golpe una oblicua igualmente correcta: "¿Cómo sabes que es recta? -*Puedo bajar la pared.* ¿Cómo es (bajada)? -*Más corta y recta.* -¿Sería la misma longitud si la pared estuviera levantada? -*No.* -¿Entonces cómo sabes que es el camino más corto? -*No lo sé*". Pero poco después habiendo empleado únicamente este mismo método (trayectos oblicuos y verificación por proyección), DIA concluye: "*Es el ángulo el que cambia, pero es siempre el mismo cambio* (enderezado o proyectado) *el que es el más corto*". DIA llega así al estadio III.

Vemos bastante bien con estos ejemplos y hubiéramos podido alargar la lista, que la idea de igualar los caminos diferentes por una compensación de sus segmentos respectivos (si A lleva a B en uno de los dos trayectos, B llevará a A en el otro etc.), no es la idea excepcional de algunos sujetos que buscan la originalidad, sino caracterizan bien un nivel distinto.

En estas condiciones, la interpretación más simple consiste en

admitir que la diferenciación de los puntos de vista, insuficientemente impulsada, en todo caso poco explicitada en el nivel IIA, de donde su coordinación relativamente fácil, llega a ser el problema central para los sujetos de 9-10 años, más preocupados por la precisión: la razón es que en el análisis, creen percibir contradicciones, evidentes entre lo que es observable cuando la pared está proyectada o enderezada pero también lo que es más notable, entre lo que FRE llama la línea "seguida por un objeto", es decir, medible de cerca y la línea "de vista", es decir, percibida proyectivamente.

Habría que esforzarse por superar estas contradicciones aparentes, esto llevaría al sujeto a la idea de compensación: si un trayecto T 1 parece más corto que T 2 en una situación y más largo en otra y si los diferentes puntos de vista diferenciados son legítimos, no queda, en efecto, más que un procedimiento de coordinación que es, considerarlos como iguales, pero entonces sería por medio de una compensación en las variaciones de sus segmentos respectivos. Si esta interpretación se justifica, se puede decir entonces que hay un progreso en la diferenciación de los puntos de vista al pasar del nivel IIA a IIB, pero que su coordinación permanece insuficiente. No es que ella está en regresión ya que lo que caracteriza al nivel IIA estaba facilitado por una diferenciación poco estimulada o explícita.

Pero la coordinación necesaria en la nueva situación no consistirá en invocar las compensaciones inverificables sin medida sino en comprender estas dos verdades que el espacio proyectivo no conserva las longitudes y sobre todo que éstas permanecen métricamente iguales vertical y horizontalmente, lo que ratifica que el espacio euclidiano es isótropo, de tal manera que una suma de segmentos rectos permanece como una invariante independiente de su orientación.

§/4- EL ESTADIO III Y CONCLUSIONES- Ejemplos.

MAR (11;4) construye el camino exacto, se le propone xx'y: "¿Cuál es el más corto? -*Este* (exacto). -¿Por qué? -*Está en línea recta.* -¿Cómo lo compruebas? -*No hay rodeo, no hay ángulo recto.* -¿Cómo estás seguro? -*Si se pudiera doblar*". Se dobla. "*Cuando la pared está proyectada o en lo alto, no cambia, es igual, la línea no cambia*". Se dibuja un camino vecino declarando que en el suyo el segmento H es más largo. Responde que "*entonces quizá sean iguales*", pero conserva su convicción porque con la pared proyectada su camino está "*en línea recta*" y una vez enderezada "*no cambia*".

CHR (12;0) indica el camino más corto, "*porque la línea no está quebrada ni curva, es recta. Una línea recta es siempre la más corta.* (Se sugiere xx'y). *Es una línea*

quebrada. -¿Cómo se puede decir que 1 es recta y 2 quebrada? -*1 está quebrada a causa de la pared que forma una perpendicular con el suelo, 2 se podría decir que forma dos líneas quebradas, gira y además, la pared es perpendicular al suelo*". Se propone desplegarla: el sujeto traza entonces 3, corrigiendo una ligera curvatura que subsistirá en 1. Se endereza la pared. "¿Cuál es la más corta ahora? -*Siempre la 3.* -¿Por qué? -*Porque es recta.* -¿3 es recta? -*Está quebrada a causa de la pared perpendicular. Pero siempre es recta, no ha cambiado de posición, no ha sido desviada, permanece recta*". Situación III (la casa de cartón): "*Ella* (trayectoria correcta) *es recta, porque si pusiéramos la cosa horizontal, se llegaría en primer lugar a la lechuga porque sería recto*".

LIP (12;1) dibuja inmediatamente la recta "*porque el camino más corto es la línea recta.* -¿Cómo se puede saber que es una recta? -*Desplegando la hoja. Si la desplegamos tendremos una línea recta.* ¿No podemos imaginarnos otras que sean más cortas o más rectas? -*No hay más que un camino que es el más corto y el más recto.* -¿entonces la regla es siempre la misma? -*Sí, siempre.*"

OLI (12;1) para verificar su camino en la pregunta: "Cómo podemos saber?" -propone medidas con el centímetro. "Hay alguna otra cosa que podamos hacer? -*Podemos proyectar la pared, el camino será recto.* -¿Los otros también? -*No del todo*".

Parece que no hay ninguna diferencia entre estas reacciones y las del nivel IIA donde los sujetos decían ya que, al medir los trayectos sobre la pared proyectada o enderezada, "es siempre la misma longitud" (AME) y sobre todo que "no podemos tener dos caminos (distintos) que sean rectos" (JAN).

Los únicos matices, pero difíciles de evaluar, que parecen caracterizar a estos sujetos en relación a los de 7-8 años (independientemente de toda la etapa IIB que los ha separado) son que en IIA el sujeto se siente rápidamente seguro de su solución y no busca probarla, la proyección de la pared le es sugerida de una manera u otra y le proporciona simplemente un índice más, mientras que los sujetos del estadio III son sensibles a las objeciones y ven en la proyección una demostración útil: así es como MAR, LIP, y OLI la proponen frente a la pregunta: "¿Cómo estar seguro?".

De cualquier modo, parece evidente que la coordinación de los puntos de vista y la integración en un sistema total tienen un rango superior para este nivel que para IIA, en tanto alcancen un grado que permanece definitivo en el adulto medio.

Las propuestas categóricas de LIP según las cuales la recta queda "siempre" como el más corto y único camino, nos lleva a nuestro problema inicial: ¿en qué consiste la generalización constructiva cuando se trata más de justificar la extensión de una ley considerada desde el comienzo (o al menos del nivel IB) como universal que de acrecentarla y de dar cuenta de sus excepciones aparentes y, sobre todo, aplicarla a situaciones donde, en un primer

acercamiento, no se está en presencia de recetas sino sólo de segmentos de rectas orientados en forma diferente.

Lo propio de la generalización consiste, en tales casos, en diferenciaciones e integraciones pero queda por precisar su naturaleza. En cuanto a las primeras pueden ser impuestas de afuera y no dar lugar más que a simples comprobaciones (o abstracciones) empíricas a título de variaciones "extrínsecas" impuestas por las experiencias: por ejemplo, los sujetos del nivel IB son capaces (desde el punto de vista del caracol) de trazar una recta casi correcta, enfocando el objetivo a alcanzar, pero observando este camino de lado ya no lo consideran recto. De allí la disociación de VAL entre el más recto y el más corto, la opinión de KAR que "ninguno" es más corto y su incapacidad de decidir "si son 2 trazos o uno solo". Por otra parte, según esté la pared acostada o levantada "eso cambia" etc. En tales casos, las extensiones admitidas por el sujeto están ciertamente determinadas por las propiedades en comprensión, comunes a ciertas situaciones y diferentes en otras, pero se trata sólo de características comprobadas y no construídas, de tal manera que las generalizaciones admitidas o rechazadas están dictadas desde el exterior, lo que es propio de éstas que llamamos inductivas (y que en el caso particular son sobre todo notables por las limitaciones extrínsecas de sus extensiones). Puede ser preferible, entonces, no hablar de diferenciaciones, ya que éstas conllevan un factor activo, pero sí simplemente de disociaciones, en particular a falta de integraciones.

A partir del nivel IIA intervienen, al contrario, ciertas diferenciaciones de otro tipo, que se basan naturalmente todavía en observables, siendo comunes las relaciones espaciales al objeto y al sujeto pero los enriquecen con propiedades construidas por este último. Cuando éste traza una recta xy, a pesar de los dos planos V y H, sabe bien que visto de lado no es recta, pero sabe también que mirándola según el "objetivo" la encuentra rectilínea. Cuando la pared está acostada ve bien que el cuadro es diferente del de la pared levantada, pero una medida daría la misma longitud (AME) y, a pesar de la diferencia, "eso no cambia evidentemente" (JAN).

En otras palabras, las diferenciaciones en juego presentan entonces ese carácter notable (y operatorio) de llevar una composición de transformaciones y de constancias lo que ratifica que se trata esta vez de "variaciones intrínsecas", inherentes a un sistema e implicando así una parte de integración. Existe, aquí, por ese hecho, la intervención de un factor de generalización constructiva aun si el sujeto no desempeña todavía explícitamente el juego de las variaciones que él comprende en sus acciones.

Con el nivel IIB, en cambio, nos encontramos en presencia de una situación paradójica: un sistema de variaciones intrínsecas, enteramente construido por el sujeto de tal manera que es imaginado y no corresponde a la realidad: los segmentos varían según los caminos propuestos y parecen variar según la pared sea vertical u horizontal, estos sujetos llegan a la idea, muy operatoria y evidentemente indispensable en las cuestiones de constancia, de que las variaciones podrían compensarse. Pero, en lugar de aplicar el esquema a un problema de conservación (por ejemplo en la isotropía del espacio sin la cual los sólidos se deformarían sin cesar) buscan atribuirla a trayectos diferentes en la hipótesis donde se los podría mostrar como iguales. Hay aquí un buen ejemplo de generalización constructiva pero errónea, de la que sabemos, por otra parte, que la historia de las ciencias da muchos ejemplos. En este caso particular, el error se debe, sin embargo, a un progreso en las diferenciaciones que, siendo más estimuladas y sobre todo más explicitadas, dan la impresión de contradicciones: el modelo de las compensaciones es invocado con el objetivo de suscitarlas pero conduce, a falta de justificación a una integración inadecuada, particularmente en cuando a las proyecciones.

La integración, al contrario, se logra cuando el sujeto comprende (en actos o en palabras) la isotropía del espacio. Es notable al respecto que los sujetos del estadio III no se contenten con sostener que al proyectar o enderezar la pared se conserva la longitud de la línea como ya lo dicen los del nivel IIA sino llegan a precisar que los cambios de plano no producen ninguna "desviación": la línea "es siempre recta, no ha cambiado de posición (relativa) no se ha desviado" dice CHR.

Es decir, es justamente lo propio de un espacio homogéneo e isótropo en oposición a un espacio centrado (como el de Aristóteles): conservar la indeformabilidad de sistemas independientemente de su orientación, y es el principio admitido que la métrica de los caminos "seguidos con un objeto" (como decía FRE) es conciliable con las modificaciones proyectivas, los distintos puntos de vista llegan a ser así, a la vez diferenciables pero, por composiciones de variaciones "intrínsecas" e integrables en un todo coherente.

CAPITULO VIII
DIFERENCIACIONES E INTEGRACIONES EN EFECTOS MOVILES DE SUPERPOSICIONES (MUARÉ)

con E. Valladao y M.A. Fluckiger

Cuando se mueve una trama de tela sobre otra, aunque sea ligeramente, se obtienen múltiples combinaciones, que animan todo el sistema y que, en el tejido de las sedas, dan las ondulaciones o los centelleos que caracterizan las telas "muarés" (conocidas desde siempre en el Oriente e imitadas en Europa). En el laboratorio, el principio de estas amplificaciones espectaculares obtenidas con el menor movimiento, se aplica en numerosos campos (cristalografía, óptica, microscopia, biológica, etc.) y, a partir del último siglo, Lord Raleigh lo utilizó para verificar la precisión de las rejillas de difracción.[19]

En lo que sigue (ver la gráfica), se utilizarán únicamente las tramas formadas por dos conjuntos de rectas paralelas, la una inmóvil y la otra (sobre transparente) deslizándose sobre la primera, según posiciones angulares variadas. Se pueden obtener así, efectos nulos o estáticos (producción de cuadrados o rombos) o bien cinéticos (movimientos globales en forma de "ondas", dirigidos al mismo tiempo hacia arriba o hacia abajo y hacia un lado o hacia otro).

Para facilitar las previsiones o la comprensión, y para analizar los procesos de generalización, habitualmente, se han presentado conjuntos de dos, cuatro, o un número más elevado de paralelas, en diversos órdenes posibles.

Los problemas planteados a este respecto por la presente investigación son de nuevo, los de diferenciación y de integración. En cuanto al primero de estos dos puntos de vista, se asistirá al paso de las variaciones "intrínsecas" a la transformación deducible, construyendo y explicando las relaciones entre un estadio y el siguiente (con todas las dificultades que existen para el sujeto, de reducir un cambio continuo a una sucesión de estadios). En cuanto a

[19] Ver G. Oster y Y. Nishijima, Moiré Patern, *Scientific American*, mayo 1963, pp. 54-63.

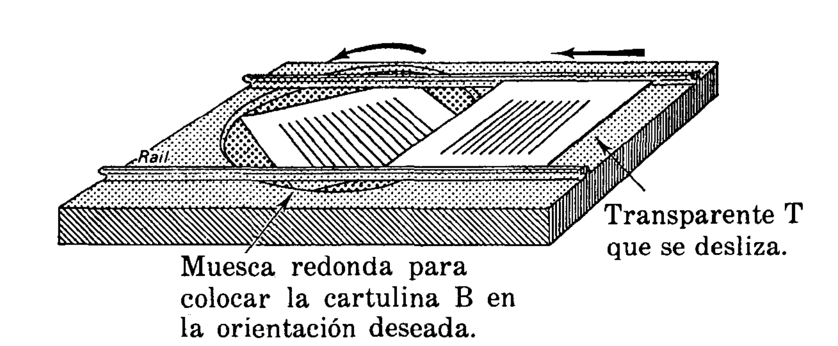
la integración, igualmente inherente a la generalización constructiva, podrá presentarse bajo tres formas: producto cartesiano (aunque quede implícito) de todas las variaciones intrínsecas; conjuntos cocientes o conjuntos de equivalencia con sus relaciones; y estructura abstracta que destaca la álgebra de las operaciones en juego, o sea "la razón" ("cruzar" o "deslizar sobre", dirá por ejemplo un sujeto) de las transformaciones en juego. Se tratará aquí pues, de que el sujeto encuentre leyes distintas según las situaciones y de integrarlas al mismo tiempo en un sistema que coordine las diferenciaciones.

Material y técnica.- Con el fin de simplificar los tipos de composiciones obtenidas en las telas de muaré clásicas, nos hemos limitado a estudiar primero los efectos de tramas muy simples: la situación de base consistente en un dibujo cuadrado, compuesto por líneas verticales negras, equidistantes, reproducido de manera idéntica: a) sobre un cuadrado transparente (T) y b) sobre una cartulina cuadrada (B), de manera que los dos diseños sean susceptibles de superposición.

Además de esta situación de base, a menudo introdujimos dos situaciones todavía más sencillas que son la descomposición de la primera. Estas permiten ver cómo el niño entrevé el movimiento aparente del cruzamiento cuando (T) desplaza una sola línea en relación a otra, o dos líneas paralelas en relación a otras dos (este dibujo se reproduce sobre el (T) y sobre el (B)). La intersección de estas dos parejas de líneas forman un rombo.

Luego, se pasa a situaciones más complejas, pero gracias a un dispositivo particular, limitamos el tipo de movimientos posibles. En efecto, en las telas de muaré clásicas, se pasea el (T) a voluntad sobre la (B), lo que produce efectos muy complicados (cambios de ángulos, etc.). En nuestro caso, fijamos una sola dirección del movimiento, con la ayuda de dos rieles sobre los cuales se desliza (T). Previamente, se ha colocado bajo estos rieles la (B) en la orientación deseada.

Se varía así: 1) la orientación de la cartulina (movimiento rotativo) y 2) el sentido en que el cuadrado transparente se desliza (dirección →o←), así como su orientación (dos posibilidades: paralelo o perpendicular al sentido del movimiento), obtenemos una serie de situaciones diferentes que serán descritas como sigue:

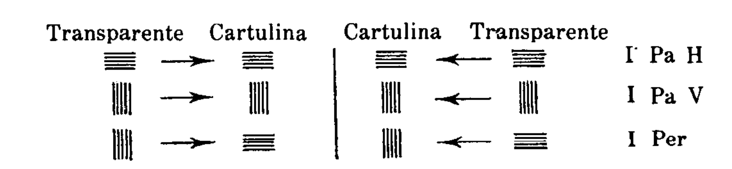


1. En las situaciones I no intervienen más que los conjuntos de líneas horizontales H o verticales V, tanto sobre la rejilla inmóvil, B, como sobre el transparente inmóvil, T. Si llamamos, Pa, el caso en que el movimiento de T está en la prolongación de la orientación de las barras de esta rejilla móvil y, Per, el caso en que el movimiento es perpendicular a la orientación, tendremos las 3 (o 6) combinaciones:

I Pa H (sentido →o←): como no se trata más que de horizontales ajustadas idénticamente sobre las dos rejillas, su coincidencia no modifica nada.

I Pa V (sentido →o←): el paso de las verticales V en T sobre las V en B, dará una alternancia de negro, blanco, negro, blanco.

I Per (sentido →o←): el efecto producido será un conjunto de cuadrados inmóviles.



Por otra parte, designaremos por situaciones II a aquellas en que intervienen líneas oblicuas sobre la rejilla inmóvil B. En los casos en que tenemos unas líneas V sobre T, se obtienen efectos de movimientos aparentes o una especie de ondas que producen los rombos hacia arriba o hacia abajo, con desviaciones hacia la izquierda o hacia la derecha.

Las oblicuas serán designadas por D cuando la cúspide esté orientada a la derecha y por G cuando la misma esté orientada hacia la izquierda. De ahí las cuatro situaciones: IIV→D (subida), IIV→G (descenso), IID←V (descenso) y IIG←V (ascenso).

Transparente Cartulina | Cartulina Transparente

II V → D | II D ← V

II V → G | II G ← V

Si, en cambio, los trazos del cuadrado transparente son horizontales, los rombos producidos permanecen inmóviles, de ahí 4 situaciones: IIH→D, IIH→G, IID←H, IIG←H.

Transparente Cartulina | Cartulina Transparente

II H → D | II D ← H

II H → G | II G ← H

Estas situaciones sirven, ante todo, de control para ver si en los anteriores (II V), el sujeto sólo considera el movimiento de T o también la orientación de las barras. Es útil también, a título de control o complemento, presentar en posición vertical tal o cual de estas situaciones II.

En cada situación, el experimentador le pide al niño: 1) que anticipe lo que va a pasar cuando el cuadrado transparente (T) va a deslizarse sobre la cartulina (B): "Ves estas líneas T y estas líneas (B), ¿qué es lo que se va a ver cuando estas líneas (T) van a pasar por encima de las otras?; ¿Qué dibujo hará en medio mientras T va pasando? ¿Que es lo que se verá en medio?" 2) Que explique su anticipación: "¿Cómo puede ser que eso suceda como tú lo dices?" 3) Después de una lectura, que reexplique lo que pasó: ¿por qué? A veces, se le pide al niño que ejecute él mismo un cierto efecto exigido por el experimentador. Se le presentan las dos placas (B) y (T) y se le pide que las coloque de manera que se obtengan por ejemplo, ondas ascendientes. Por lo general, se le pide al niño que dibuje lo que está anticipando. Esta representación es interesante porque da indicaciones acerca de su manera de componer las dos tramas entre sí.

En cuanto a situaciones simplificadas que sólo tienen 2 o 4 líneas, éstas dan indicaciones más precisas sobre el tipo de explicaciones que los sujetos pueden dar acerca del movimiento aparente en las situaciones complejas. La descomposición del problema obliga al niño a centrarse en el caso de las 2 líneas, en lo que sucede cuando una de ellas pasa sobre la otra. Esto permite verificar: a) si el niño percibe el desplazamiento del punto de intersección y b) si el niño considera este movimiento (en el caso en que lo vea) como una parte de la onda del material de base (es decir, si el niño puede generalizar este movimiento a la suma de líneas). La situación de 4 líneas (1 par pasando sobre otro) es un intermediario entre las situaciones de 2 y de n líneas, en el que las intersecciones entre las líneas delimitan una superficie (rombo) muy obvia perceptivamente. Es interesante ver aquí, si el niño es capaz de considerar este rombo como delimitado por las intersecciones o si presenta para el niño una identidad propia.

En ambos casos, se le pide al niño: 1) anticipar lo que va ocurrir cuando el (T) pasa sobre (B): cuando (T) comienza a tocar (B), en el momento en que se encuentra en el medio, cuando esté al final:

-por una secuencia de dibujos: |/|·X|/|
-por una descripción verbal.

En realidad, el movimiento aparente de la intersección, a menudo se representa sobre el dibujo, pero no se menciona en la descripción verbal. 2) Explicar esta anticipación. 3) Después de una lectura, reexplicar el fenómeno.

§/1- EL NIVEL IA- Como de costumbre, es útil tratar de comprender el motivo de las dificultades o los fracasos iniciales:

MAG (5;2) I Pa V: -"Si empujo, ¿qué es lo que se va a ver? -*Lo mismo, un poco de otro color.* -¿Cómo? -*Iris.* -¿Y cuando un trazo, aquí, va a estar sobre otro allí, qué es lo que va a dar? -*No sé.* -(Exp.) -*Va a dar otro color, todo negro.* -¿Y si lo muevo en otro sentido? -*Dará lo mismo: negro en medio.* -Cuenta lo que viste. -*No sé, trazos que se mueven hacia abajo y luego hacia arriba* (en realidad, lateralmente) -(Exp.) -¿Cómo es? -*Blanco, negro, un poco negro.* -¿Y así (I Per)? -*Los trazos están del otro lado, de nuevo habrá tres colores* (ella no ha comprendido pues. I Pa V) -(Exp.). -*No, hay que moverlo del otro lado.* -(Se invierte el sentido) -*No, así tampoco, hay que hacerlo como*

antes (se equivoca y pone I Pa H. Exp.) -*Los dos hacen lo mismo* -¿Y así (sentido inverso)? -*Puede ser que haga lo mismo, pero no lo sé.* -¿Y para que haga lo mismo que antes? (Vuelve a poner I Pa V) (Se pasa a IID←V): ¿Qué va a pasar? -*No sé.* (Exp.) -*Un poco de blanco arriba y negro. Parece un boleto: no se mueve.* -(Nueva Exp.) ¿No se mueve nada? -*No, no se mueve.* -(Nueva Exp.) ¿Nada que suba y luego que baje? -*Sí, sube y luego vuelve a bajar.* Está cruzado (= atravesado), *sube y luego baja.* -¿Más arriba que abajo? -*Las dos cosas* (pero hay una bajada aparente) -¿Y (T) del otro lado (→)? -*No se puede saber.* -(Exp.) -*Baja y después sube, es igual*".

FRA (5;6) es un poco superior a MAG. Para I Pa V, él prevé: "*Las barras que se ponen arriba de otras barras. Se verá toda la forma: barras y más barras.* -¿Vas a ver éstas sobre las otras barras? -(Exp.) -¿Qué es lo que se ve? -*Estas sobre las otras, cuando no estén justamente encima, se ven pequeños hoyos blancos entre las barras* (es lo contrario). -(I per) -*Eso hace trozos inclinados* (dibujo correcto) -(exp.) -*Es como lo dije.* -(otro sentido). -*Será igual* -(I Pa H) -*Se verá uno sobre el otro.* -(IIG→H) -*Trazos acostados y trazos inclinados* (él hace dos dibujos separados para H y G, luego los reúne en un todo y al interior de un cuadrilátero invertido, luego mirando su dibujo): *Esto hace estrellas* (rombos) -(IIG←V) -(Los mismos dibujos inclinados pero con orientaciones inversas de los marcos). -(Exp.) -¿Qué es lo que ves? -*Cosas blancas que suben, que suben todo el tiempo: el negro hace subir al blanco.* -(IIV→D) -*Eso dará lo mismo* (Exp.) *Ah, no, bajan.* -(Sentido contrario) -*Está inclinado en este sentido* (de nuevo, sentido opuesto a la realidad)".

DUC (6;0) comienza por las composiciones de una sola línea: para 2 paralelas "*esta línea irá sobre aquella*", pero para 2 perpendiculares "*no puedo dibujar una sobre otra*": la vertical estando trazada, la horizontal se acerca poco a poco y termina por dar "*una cruz que avanza todo el tiempo*". Con una oblicua: correcto, pero marco invertido. I Pa V: "*Habrá dos barreras.* -(Exp.) -*Llena los pequeños hoyos.* -¿Por qué? -*Hay 2 barreras. Es como un toldo: ti-ti-ti*". I Pa H: "*Hará más ti-ti-ti, será negro, el negro toma el lugar del blanco* (falsa generalización de I Pa V). -(I Per) -*Hará ti-ti-ti, porque aquella* (H) *es así* (dirección de V, pero no se percata de la perpendicularidad). -(Exp.) -*No, hace cuadrados.* -(II D←V) *Así* (dibujo correcto, pero sin marco). -(Exp.) -*Pequeños cuadrados que se van.* -¿Adónde? -*Hacia arriba.* -¿Y así (a la inversa)? -*Subirá* (Exp.), *No, baja*".

OSC (5;6) es interesante por el contraste entre sus dificultades en cuanto a la composición de 2 o 4 trazos y las composiciones de conjunto: para 2 verticales y 2 oblicuas, el niño dibuja las dos T con marcos y dice: "*No puede hacer la otra encima*" (finalmente, las yuxtapone en el mismo marco). Para 1 vertical y 1 oblicua, la misma dificultad, pero para n y n (IID←V), el dibujo sí es posible: "*Estas son las barreras y hay otras debajo*".

Tres características de este nivel son especialmente notables: la dificultad para representarse un estadio (superposición de T y B) como el resultado del movimiento (falta de imágenes cinéticas suficientes, como lo hemos mostrado antes),[20] la indiferenciación, en el momento del movimiento de T, entre la dirección de este movimiento y la orientación de las barras y, sobre todo, la falta de

[20] Piaget y Inhelder, *L'image mentale chez l'enfant*, PUF, 1966.

comprensión del mecanismo que se detecta en las vacilaciones más largas a la hora de las composiciones de 2 o 4 trazos, mientras que parece más fácil representarse la superposición de las dos figuras de conjunto T y B.

Sobre el primer punto, vemos a MAG confundir I Pa V y I Pa H, a FRA creer que lo blanco entre las barras se debe a su mala superposición, a DUC creer que lo blanco y lo negro se encuentran en I Pa H, como en I Pa V, etc. En cuanto a las confusiones de orientación y de dirección, MAG piensa que I Per acturá como I Pa V, porque "los trazos van hacia el otro lado", DUC también, etc. Pero lo más curioso es la reacción de DUC y de OSC, quienes no pueden "dibujar una sobre la otra" dos o cuatro trazos, mientras que para el conjunto de las rectas, sí es posible, puesto que "son barreras y están las otras debajo". En otras palabras, la superposición de dos figuras colectivas, sí es realizable, porque cada una tiene sus propias estructuras que se pueden dibujar por separado, sobreponerlas al mismo tiempo (como se dibujara un cuadrado dentro de un círculo, etc.), mientras que la unión de dos trazos diferentemente orientados plantea un problema de relación, en la medida en que hay que decidir la posición de una en relación a la otra, y no simplemente dibujar sucesivamente dos conjuntos tal como aparecen (cada uno teniendo su propia forma), incluyéndose simplemente en el mismo marco. Es, en cambio, en la posición de este marco común que se vuelve a encontrar la dificultad, y FRA, invierte su inclinación.

§/2- EL NIVEL IB- En los sujetos de 5 1/2 a 7 años, hay un progreso en cuanto al primero de los tres puntos indicados anteriormente, pero poco sobre los otros dos:

ARN (5;5), I Pa V: "*Va a ser línea sobre línea, se verá negro y negro.* -(Exp.) -*Se ve negro y blanco cuando se mueve la línea que está al lado de la otra, llena lo blanco.* -(Otro sentido) -*Pasa lo mismo, pero en el otro sentido.* -(I Per). -*Esto dará pequeños cuadros*". II G←V: dibujo correcto (Exp.): "*Oh, se mueve, se diría que sube.* -¿Por qué? -*Porque la otra queda derecha y ésta pasa, pasa y luego sube.* -(Sentido→). -*Esto subiría... no, más bien bajará.* -¿Por qué? -*Porque hace un rato subía. No sé entonces porque ahora va a bajar*". Previsiones siguientes, arbitrarias: constatando que en (II→H D) queda inmóvil, mientras que prevé un movimiento en el sentido→, explica: "*porque T se volteó al revés* (= H) *y la otra está inclinada, por lo que no se mueve*", o sea, descripción pura. Con dos trazos, vertical y oblicuo, él prevé primero una subida de éste último hacia arriba, y después, un cruzamiento, pero sin desplazamiento del punto de cruzamiento: "*Porque éste* (oblicuo) *no se va a mover* (= no cambia de forma), *entonces ¡éste lugar no se moverá!*"

PIT (6;6) en cuanto a esta última cuestión, falla igual que ARN. Entonces, el experimentador empuja muy lentamente la vertical sobre la oblicua: el ascenso del cruzamiento es, en este caso, muy visible: "¿Esto te ayuda a comprenderlo (IIH→D)?

-No, porque no es lo mismo: aquí (IIH D) *se mueve y aquí* (2 trazos) *no se mueve*". Por tanto, ella no ve ninguna analogía.

ZIV (6;6) con el mismo problema de los dos trazos, vertical y oblicuo, prevé que su posición no será progresiva (como la cruz para una vertical y una horizontal) sino que la ve como el agrandamiento progresivo de una de ellas. Después de la experiencia, ella dibuja correctamente el punto de cruzamiento inicial, abajo de la vertical, luego lo eleva, pero hasta el centro, y luego permanece fijo como con ARN. Con 4 trazos, ella prevé, en cambio, el rombo y para IIG—V, concluye: "*Muchos cuadritos inclinados*", pero que se supone que salen hacia la izquierda (←), etc.

LUL (6;7) prevé correctamente I Pa V; y "los pequeños cuadrados" de I Per, así como "los rombos" para IID—V, pero antes de partir hacia la izquierda. "¿De qué están hechos los trazos del rombo? *-Los que son rectos se hacen con el cristal* (T) *y los que son inclinados, vienen de la cartulina* (B). -¿Puedes dibujar? (El hace un rombo agrandado, luego dice que) *los dos rincones aquí* (arriba y a la izquierda) *vienen de la cartulina y los otros dos del cristal.* -¿Y los lados? *-Aquellos* (los 2 de la izquierda) *vienen de la cartulina y los otros* (los 2 de la derecha) *del cristal*". Entonces, se retoman los cuadrados de I Per y LUL piensa que su mitad izquierda viene de Y y la mitad derecha de B. No es sino hasta hacer deslizar el tapete T sobre B que él reconoce el papel de los trazos verticales y horizontales. En las cuatro cuestiones de movimientos aparentes IIV G y D, la previsión es dictada por el movimiento de T, independientemente de las orientaciones.

Estos ejemplos bastan para mostrarnos la paradoja propia de las reacciones de este nivel. Por una parte, el sujeto hace progresos notables en cuanto a la anticipación de lo que dará la superposición de los dos conjuntos T y B, o sea, la reproducción de dos imágenes estáticas simplemente puestas una sobre la otra. En cambio, en cuanto a la imagen cinética, es decir, al movimiento, por tanto, a la transformación como tal, que se tratará de evocar para explicar el resultado de esta superposición, estos sujetos poco progresan con respecto a los del nivel IA. LUL comprende bien que los cuadrados e incluso los rombos previstos, son el resultado de la combinación de los trazos verticales con los horizontales u oblicuos, pero comprende tan poco esta composición como tal, que, para él, una de las mitades, izquierda o derecha, del rombo e incluso del cuadrado, se debe al "cristal", o sea, a la rejilla móvil, T, y la otra mitad a la rejilla inmóvil, B. ARN y ZIV demuestran incomprensiones análogas en cuanto al cruzamiento de dos trazos aislados (nada de movimiento o movimiento continuo). Finalmente, se vuelve a encontrar, a propósito de los movimientos aparentes, la indiferenciación entre el sentido del movimiento y la orientación de los trazos. Durante las constataciones, el sujeto llega, como ARN, a prever el efecto de las inversiones de sentido, pero a título de superposición empírica, al precisar: "No sé por qué".

En cambio, es impresionante ver que la "lectura" de las observables es, en general, muy correcta, independientemente de esta falta de comprensión, sin que eso conduzca a una reproducción de situaciones ni, sobre todo, a un mejoramiento de las anticipaciones. De ello resulta que subsiste una disociación notable entre los movimientos o intersecciones percibidos y las interpretaciones: todos los primeros son atribuidos únicamente a las rejillas móviles, T, y si se le pide al sujeto que siga con la punta de un lápiz la intersección de dos líneas, no lo logra, porque sigue con su lápiz la dirección de T.

§/3- EL NIVEL IIA- Este inicio de las operaciones concretas (7-8 años) corresponde aquí a un búsqueda de explicación, para evidenciar (desde la anticipación) los movimientos aparentes: se trata de una composición entre el movimiento de la rejilla móvil T, y la orientación de los trazos sobre la rejilla inmóvil B, utilizando todo a partir de la continuidad de significado entre las relaciones de dos o cuatro trazos y las de dos conjuntos de n trazos:

COR (7;1) manifestó 7 meses antes (a los 6;4) reacciones típicas del nivel IB. A los 7;1, se acuerda: "*Se pasaban líneas, a veces estaba todo obstruido, tapaban todos los hoyos, a veces, todo estaba chueco.* -¿Se movían? -*No*". Se le presentan 2 trazos verticales que avanzan hacia 2 oblicuas: el niño muestra correctamente, que el punto de cruzamiento empieza abajo y sube hasta arriba "*porque* (los trazos verticales) *avanzan todo el tiempo*". En cuanto al cruzamiento "*eso sería un rectángulo* (dibuja un rombo) -¿Qué le pasa cuando se le empuja? -*Desaparece todo el tiempo.* -¿En qué sentido? -Así (→). -Sigue con tu lápiz. -*Sube.* "Se invierte y prevé bien. Se pasa a IIV←D: "¿En qué sentido se va a mover? -*Así* (←). -(Exp.) -*Hace esto* (←). *Lo puedo dibujar* (dibujo correcto con rombos inclinados).

STE (8;6) Todas las pruebas I bien resueltas. IIG←H: "¿Qué dará? -*Triángulos.* -(exp.) -*Rombos.* -¿Y eso (IIG←V) qué da? -*Antes estaban así ahora así* (enderezamiento de los rombos). *Se diría que suben.* -¿Por qué? -*Porque la cartulina de abajo* (= B) *no está derecha.* -¿Y esto (IID←V)? (Exp.) ¿Cómo se podría saber cuando sube y cuando baja? -*Tienen que estar así* (G) *y se le empuja así para que suba* (aquí baja), *porque usted la cambió* (D)". Se coloca el dispositivo verticalmente; al principio, se siente perdido, pero después de las constataciones, reconstituye correctamente los rombos.

VER (8;9) dibuja correctamente los cruzamientos de una vertical y de una oblicua. "¿Se mueve o no se mueve el punto de cruzamiento mientras uno empuja? -*Va hacia arriba* (correcto)". Se invierte: "*Lo mismo, pero desde el final hacia el principio, como una V al revés. El cruzamiento bajará*" IIG←V: "*Eso formará rombos* (dibujo correcto). -¿Se quedará en el mismo lugar? -*No, se moverán así* (←)". Ella indica correctamente los lados opuestos del rombo que provienen de T y los que pertenecen a B. IID←H: "*Subirán.* (Exp.) *No, no se mueven.* -¿Y esto (IID←V)? -*Son cruces, van a subir.* -Si piensas en lo que pasó con los 2 trazos, ¿eso te ayuda? -(Sí), *eso hacía una cruz, subía o se cruzaba* (horizontal). -¿Y allí (una recta contra una oblicua)? -*Baja.* -

¿Y esto (IID←V)? -*Esto hará lo mismo: allí donde se cruzan, bajará también.* (Se invierte) -*Subirán.* -¿Cómo lo sabes?... -(Se invierte de nuevo) -*Sube, no, bajará, porque es en el otro sentido*".

CRI (8;7) prevé en IIH D que "*irá hacia abajo*" y en "*hacia arriba*", luego ella trata de explicar el movimiento aparente de subida de los rombos en IIG←V al mirar un lento desplazamiento: "*Es porque este cuadrado rebasa a aquél y aquél rebasa al otro.* -¿Dónde lo rebasa?-*Al principio del cruzamiento*".

PER (9;5) explica el ascenso en IIV→D, porque el T "*va hacia la derecha, mientras que* (los trazos de B) *van hacia arriba* (¡de G a D!)". El concluye que el dispositivo IIH→D resultará también en un ascenso. En cambio, para ↓ y ↑, prevé primero lo contrario, igual que CRI, y eso paradójicamente porque ambas se concentran en la orientación de los trazos en B y no en el movimiento de T. Hay que notar también que, para PER, La superficie de los rombos que ella llama "lo blanco" y sus lados, que ella llama "*los trazos que se cruzan*" o "*las cruces*", destacan porque dan lugar a una impresión perceptiva distinta, pero no entiende el papel de las intersecciones y llega a decir: "*Es el blanco el que desciende y el negro el que sube: los blancos son los rombos, y el negro las cruces, son dos cosas diferentes*".

El progreso notable logrado por estos sujetos es la composición de las relaciones entre 2 o 4 trazos de orientaciones diferentes, de los que uno pasa sobre el otro con un desplazamiento progresivo del punto de cruzamiento (ver COR y VER) y, sobre todo, la comprensión del hecho de que estas relaciones elementales se vuelven a encontrar idénticamente en las relaciones entre los conjuntos de n trazos: "Hará lo mismo -dice Ver-, se cruzan", etc. Es particularmente notable que, en estas relaciones complejas entre n elementos, el sujeto logre disociar en los rombos aparentes, los lados opuestos que pertenecen a la rejilla móvil T, y los otros que pertenecen a B (ver a VER). Además, siendo que en las pruebas II, se trata de prever los movimientos aparentes, ya no se limita, como en el nivel IIB, a invocar simplemente la dirección de T, sino que trata de tener en cuenta la orientación de los trazos. Pero, en este caso, se limitan a la orientación de las líneas rectas presentadas en B (rejilla inmóvil), sin tener en cuenta las orientaciones en T: de ello resulta que en los dispositivos II H, donde los trazos en T son horizontales, las previsiones son las mismas que si fueran verticales (II V). Las composiciones así construidas son, por tanto, de un tipo sumario, o más exactamente, multiplicativo incompleto (moviendo T x orientación S), puesto que les faltan las orientaciones T. Pero, este defecto de composición entre las orientaciones T y S en el transcurso del movimiento de T, tiene como efecto, que el sujeto no comprende todavía que el rombo, en tanto que superficie es el producto de las intersecciones que determinan sus lados: de ahí esta consecuencia que si, en presencia de un rombo, por así decirlo,

extraído de su trama, el sujeto comprende bien a cuál rejilla T ó S pertenecen sus lados opuestos, continúa atribuyendo a su superficie la identidad de un objeto móvil, de donde proviene la curiosa afirmación de PER, según la cual, esta superficie objetivada desciende (“lo blanco”), mientras que sus lados (“lo negro” o “la cruz”) suben.

§/4- EL NIVEL IIB Y EL ESTADIO III- Los sujetos de 9-10 años prueban su habilidad en la composición completa de las orientaciones en T y S y del movimiento de T, pero no comprenden todavía el papel exclusivo y supletorio de las intersecciones. Su progreso sigue presentando dificultades en cuanto a ciertos puntos:

ROL.(9;6), después de tener éxito con 2 y 4 trazos, dice a propósito de IID←V: “*Es mejor con los pequeños* (4 trazos). *Aquí hay muchos, no se puede ver.* -¿Qué es lo que hay de igual? -*Aquí dos rectas y esos* (= las 2 otras) *están inclinadas.* -¿Entonces? -*La recta* (línea recta de T) *llega sobre las otras y eso hace subir.* -¿Y aquí (IIG←H)? -*Habrá rombos que irán allá* (←) *porque va hacia atrás* (él señala la posición de los rombos) - ¿Puedes explicar por qué con esto (V) suben y con esto (H) no suben? -*No.* -¿Y con esto (4 barras)? -*Sí, así* (V) *suben y así* (H) *los rombos no se mueven*”.

TIN (10;9) indica bien los cruzamientos que se desplazan en el ascenso o en el descenso con 2 o 4 trazos, de donde proviene, sin duda, su buena anticipación para IIV→G: “*Todas las líneas se cruzan en el medio.* -¿Y el cruzamiento por dónde va? - *Eso bajará*”. Ella indica correctamente los lados T y B de los rombos. “¿Y estos (IIG←H)? *Eso dará cuadrados inclinados.* -¿Y esos, se moverán o no? -*Parece que no se van a mover... o así* (←). -¿*Y esto* (IIG←V)? -*Eso va a descender* (olvida invertirlo) - ¿Y esto (IIH↓D)? -*Eso va así* (←), *no, en el sentido de la línea.* -¿Y los puntos (cruzamiento)? -*Así* ( ), *no, en el mismo sentido* (que los rombos). -¿por qué? -*Los puntos son 2 líneas que se cruzan, los cuadrados* (rombos) *es lo que hay en el medio*”.

LAR (11;8) “*Las líneas de T, al pasar sobre el cuadrado* (B), *forman pequeños rombos... y luego los rombos.* -¿Qué hacen? -*Serán siempre los mismos, pero...* -¿Pero qué? -*El cuadrado transparente* (T) *cruzan las líneas* (una detrás de la otra)”. El dibujo representa el principio del cruzamiento. “*Primero la parte de abajo...*”, y en el sentido inverso “*primero aquí* (arriba) y *entonces irá hacia el lado opuesto de este ángulo*”.

Para comparar, he aquí ejemplos del estadio III:

AXA (10;3) IID←H: “*Eso dará cuadrados atravesados.* -¿Se moverán? -*Se irán subiendo, no, eso no se moverá.* -(Sentido inverso) -*Lo mismo, pero en el otro sentido*”. IIG←V: “*Se moverá, porque* (así←) cruza *y así* (↑) *se desliza.* -(Exp.) -¿Qué hace? -*Las líneas así, que suben* (sube uno de sus índices a lo largo del otro) -¿Cómo? -*Porque la siguiente llega adonde estaba la otra.* -¿IIV→D? -*Es difícil. Desciende porque es lo contrario de lo anterior.* -¿Puedes encontrar una cosa sin acordarte? -*Sí, es como las líneas que cruzan*”. En vertical, correcto: “*Irá por aquí, empuja* (aquella, índice derecho sobre índice izquierdo), *entonces el ángulo desaparece poco a poco* (= se desplaza), *entonces sube*”.

FAI (10;6) IIG←V: "*Da la impresión que se mueve y si se le inclina del otro lado, irá hacia abajo*". El explica por una sucesión de cruzamientos. En particular: "*Provienen de donde todos los blancos* (superficies de los rombos). *Provienen del cruzamiento*".

GER (11;5). IIV→D: "*Los trazos de T van a subir, es como si no fuera más que una barra* (él ha pasado ya por la prueba de las dos barras), *subirán todos al mismo tiempo sobre los trazos* (de B). *Dará la impresión que hay un cruzamiento que sube, todo subirá al mismo tiempo* (Exp.) *Formará una especie de rombos que suben*. -¿Son cada vez nuevos o son los mismos? -*Son nuevos porque no son siempre las mismas líneas que pasan*. -¿Qué prefieres como explicación, a los rombos (que él no previó), o los cruzamientos? -*Los dos van bien... pueden ser que una sea mejor*. -¿(IIH↓D)? -*Eso formará, de nuevo, rombos. Se desplazarán así* (↓). *No, seguirán al T* (↓)". IIG←V o IIV→H: "*Cambia. No hay que voltear los trazos si uno quiere que sea igual*".

Vemos que los sujetos del nivel IIB están cerca de la solución. Toman en cuenta las dos orientaciones: en T y en B, y ya no únicamente la primera, y de ahí su éxito en la situación IIH←G, o como lo dice uno: "los rombos no descienden porque el T corta". Pero todavía no ven que el movimiento aparente no es más que una "impresión" como dijeron TIN y GER en el estadio III, resultante del desplazamiento del conjunto de las intersecciones y no se identifica con un movimiento material de los puntos de T. La distinción puede parecer sutil, puesto que esta apariencia es la consecuencia del movimiento real de T, pero las vacilaciones de LAR y los comentarios de TIN parecen indicar muy bien que, para ellos, se trata siempre del desplazamiento objetivo de puntos o de superficies, mientras que en el estadio III, el movimiento percibido ya no es una entidad material, sino la "impresión" producida a cada instante por las nuevas intersecciones.

§/5- CONCLUSIONES- Los resultados anteriores constituyen un bello ejemplo de construcción lógico-geométrica de estructuras cada vez más complejas por generalizaciones sucesivas de una sola y misma acción u operación: el paso de 1 o n rectas en movimiento sobre 1 o n otras inmóviles con las tres posibilidades solidarias de superposiciones, yuxtaposiciones, cruzamientos (intersecciones).

1) La superposición (I Pa H) no modifica nada, pero, por más evidente que parezca esta aserción, no es más que el producto de constataciones sin, ni siquiera, generalización para la situación inversa H→H, implicando H←H (ver a MAG en IA: "Puede ser que haga lo mismo, pero no lo sé"). En cuanto a la alternancia de superposiciones y yuxtaposiciones (I Pa V), la misma MAG no prevé más que la superposición, lo mismo que FRA, quien, constatando la

diferencia entre ésta y la yuxtaposición, da una falsa explicación. En cuanto a la forma más simple de intersección con perpendicularidad (I Per), dando figuras de escuadra, MAG no lo prevé, diciendo que: "los trazos van del otro lado", pero FRA (IA también) llega a la previsión, apoyándose en el resultado empíricamente constatado de las acciones sucesivas (dibujo de los trazos "inclinados", luego otros trazos "parados"). En cambio, DUC, apoyándose en el sentido del movimiento de T (independientemente de la orientación de las líneas) prevé el mismo resultado para I Per que para I Pa V.

El método de dibujos sucesivos con la lectura de los resultados de sus acciones, permite, después a FRA, una nueva generalización importante, pero, sin embargo, sigue siendo inductiva (fundada sobre las observables únicamente): la combinación de las horizontales y de las diagonales ("Trazos acostados y trazos inclinados") que conforman a los rombos (en IIG—H), lo que DUC logra también en IID←V. Pero, en cuanto a la naturaleza de estas generalizaciones, una reacción propia del estadio I (en IB como en IA), es muy esclarecedora: como se vio, el niño llega más fácilmente a previsiones correctas con los conjuntos de n y n trazos, que con 2 ó 4, porque en el primer caso, sólo se trata de sobreponer dos imágenes estáticas que no son más que copias de las figuras sobre T y B, mientras que con 2 ó 4 elementos, hay que encontrar sus relaciones y precisar la composición como tal. Puesto que la generalización constructiva comienza con esto, encontramos, por el momento, inducciones empíricas y extensivas (ver en particular las incomprensiones de LUL en cuanto a las dos "mitades" de los rombos).

El proceso siguiente, realizado en el nivel IIA, consiste entonces en una generalización complementaria, ya no sólo referente a las características estáticas de las figuras presentadas, sino también a la acción misma de pasar la una sobre la otra, o sea, al movimiento como tal, lo que permite, ante todo, la composición de 2 ó 4 elementos y su generalización de n a n. Pero, como el movimiento de T actúa sobre los trazos de B, es primero la pareja móvil-inmóvil que salta a la vista, es decir, la puesta en relación de la dirección de T con la orientación de las rectas en B, sin considerar la orientación en T (de ahí los errores del nivel IIA sobre II H → confundido con II V →). Sin embargo, de ello resulta un serio mejoramiento en la comprensión de los cruzamientos.

La etapa posterior consiste, entonces, en distinguir en los movimientos de la rejilla móvil T, los que prolongan la orientación de los trazos en esta T y los que son perpendiculares a esta orientación. He

aquí el logro del nivel IIB, por lo que el sujeto ya está en posesión de las diferenciaciones necesarias para darse cuenta, en el estadio III, de las diversas formas de intersección y para reducir los diferentes movimientos aparentes.

2) En esta evolución, se vuelve a encontrar una de las características esenciales de la generalización constructiva (la que no proporciona al principio más que marcos conceptuales a la inductiva, luego toma su vuelo autónomo a partir de las composiciones del nivel IIA): la diferenciación y la integración de las acciones. La primera consiste en una supresión paulatina de las limitaciones precedentes o, si se prefiere, en una negación de la unicidad (exclusividad) de la posibilidad anterior en beneficio de la más cercana: no solamente superposición, sino también yuxtaposición; no solamente estas dos vinculaciones, sino también cruzamientos entre perpendiculares; no solamente entre éstas dos, sino también intersecciones con diagonales; no solamente la orientación de los trazos en B, sino la dirección de T, luego la orientación en T, y, finalmente, la diferenciación de los movimientos aparentes y reales, por composición general de las intersecciones. Pero estas negaciones o supresiones de las limitaciones anteriores[21], sólo se imponen en un primer momento, desde afuera. Los nuevos dispositivos invalidan o modifican las previsiones derivadas de los antecedentes, pero el sujeto las construye inmediatamente, por simple deducción, o cuando se trata de comprender resultados imprevistos.

En cuanto a las integraciones correspondientes a estas diferenciaciones, volvemos a encontrar, a pequeña escala, las variedades lógico-matemáticas usuales de la construcción de las estructuras: bajo una forma implícita, el producto cartesiano de todas "las variaciones intrínsecas" del sistema, o sea, de aquellas que el sujeto ha diferenciado paulatinamente bajo una forma un poco menos implícita, los conjuntos cocientes o conjuntos de equivalencia, en función de las analogías o morfismos descubiertos poco a poco; y bajo una forma un poco más explícita, la "álgebra de las operaciones", es decir, el conjunto de las razones que, a los ojos del sujeto de los estadios II y

[21] Ver a este respecto, la investigación con M. Lavallée sobre las diagonales: un dispositivo permite al niño trazar una línea horizontal o una vertical, si son sucesivas, pero los dos movimientos simultáneos dan una diagonal, si son de la misma velocidad. Si una de ellas prevalece sobre la otra, pero cada una a una velocidad constante, el resultado es una diagonal en cualquier dirección, y si hace variar las velocidades, el sujeto obtiene curvas. En este caso, igualmente, cada etapa resulta de la supresión de una limitación, o sea, del descubrimiento de una posibilidad pero por negación de la unicidad (o exclusividad) de la anterior.

III, vuelven necesarias las vinculaciones, que, hasta entonces, se quedaban a nivel de simples observables.

En cuanto al producto cartesiano, cuyo cuadro presentamos más abajo, se podría objetar, como en varias de nuestras estructuras, que no constituye un objeto reflexivo del pensamiento del niño (aunque fuera posible hacerlo construir por los sujetos del estadio III). Pero lo que nos importa es que corresponda a lo que *sabe hacer* el sujeto cuando se trata de prever o de explicar las relaciones posibles entre las variables de T y las de B: pues, se trata de una estructura inherente al sujeto, pero, como de costumbre, de una estructura no pensada, porque es la de sus operaciones. Si su utilización le basta, no se siente necesitado de tematizar. En cuanto a los conjuntos de equivalencia 1, 2 y 3, es la distinción entre los conjuntos 2 y 3 la que caracteriza las reacciones del nivel IIB, mientras que éstas quedan indiferenciadas en el nivel IIA.

Rejilla Móvil T		Movimiento que prolonga la orientación de las barras.					Movimientos perpendiculares a la orientación de las barras.				
		V↑	V↓	$\vec{H}$	$\vec{H}$		$\vec{V}$	$\overleftarrow{V}$	H↑	H↓	
Rejilla Inmóvil B	V			C	C	Conj. 1	BN	BN	C	C	Conj. 1
	H	C	C				C	C	BN	BN	
	OD	LD	LD	LD	LD	Conj 2.	↑→	←↓	↑→	←↓	Conj. 3
	OG	LG	LG	LG	LG		↓→	←↑	←↑	↓→	

Leyenda:- efecto nulo (superposiciones): BN = alternancia de blanco y negro; C = Cuadrado, LD = Rombo derecho, LG; rombo izquierdo; , etc., = movimientos aparentes; V = Vertical; H = Horizontal; OD = Oblicuos cúspides a la derecha; OG = Oblicuos cúspides a la izquierda.

En resumen, esta investigación nos muestra cómo un conjunto de variaciones al principio simplemente extrínsecas, es decir, constatadas sin ser comprendidas, se transforman en variaciones intrínsecas, o sea, en composiciones regidas por las vinculaciones de necesidad en el interior de un sistema de construcciones deductivas. Es cuando se dan las generalizaciones constructivas que reemplazan las inducciones empíricas iniciales, en función de un doble proceso. Existe primero el de la diferenciación, que no consiste únicamente en un juego de disociaciones o de abstracciones, sino también, como lo acabamos de subrayar, en una supresión de limitaciones, en una apertura hacia nuevas

posibilidades por negación de la unicidad o exclusividad de las precedentes. De ahí, el proceso complementario de la integración que vuelve a vincular estas posibilidades entre sí, por un lazo de necesidad, al determinar cada variación intrínseca (intersecciones, etc.), como una resultante deductiva implicada por el conjunto de las otras. Así, se constata que la generalización constructiva engendra formas y contenidos nuevos, en tanto que órgano de diferenciaciones así como de integraciones, y resulta similar a la noción de "variación intrínseca", uniendo en una misma totalidad, los dos aspectos complementarios.

CAPITULO IX
UN PROBLEMA DE MOVIMIENTOS RELATIVOS.

con: C. Kamii, E. Dekkers y S. Dayan.

El problema estudiado aquí difiere de la mayor parte de los anteriores (igual que de los que seguirán), en que la generalización inductiva no encuentra ningún obstáculo, independientemente de la comprensión de las "razones" de la ley, mientras que éstas, en lugar de ser descubiertas por etapas progresivas no lo son más que tardíamente y con una dificultad sorprendente con respecto a las cuestiones habituales de movimiento relativo. En efecto, cuando un caracol circula sobre una charola que uno mueve, o cuando un viajero recorre un tren en marcha, el sujeto logra con más o menos dificultad entender, a partir de los acercamientos del estado de las operaciones formales, que el desplazamiento efectivo resulta de la composición de los dos movimientos en juego, puesto que uno de los móviles desencadena al otro. En cambio, si el soporte describe un movimiento no de traslado (como la charola o el tren), sino de rotación como un rodillo sobre el que se empuja una tabla, los sujetos (y frecuentemente los adultos) no llegan a comprender, sino muy difícilmente, por qué, si el rodillo avanza de "n" unidades en relación a la mesa, la tabla se desplazará de "2n" unidades: en efecto, el rodillo, al dar vueltas, también la hace avanzar, de "n" unidades, de tal manera que hay que agregar a la marcha del rodillo el avance que éste impone a la tabla. Pero salta a la vista que el obstáculo a esta solución no es simplemente que la rotación del rodillo tenga que entenderse como un trayecto lineal, sino además y sobre todo es preciso entender que la tabla es la que hace rodar el rodillo mientras que éste, a su vez, hace que la tabla se mueva. Aunque una situación de esta naturaleza de movimientos de acción recíproca sea la que todos los niños experimentan diariamente con su bicicleta, la cuestión es más difícil en el presente caso, puesto que la tabla se adelanta al rodillo ya que es éste el que provoca su marcha, se atrasa con respecto a ella. Por tanto, nos ha parecido interesante estudiar las relaciones entre las generalizaciones extensivas y constructivas en el caso en que éstas no proporcionen las razones de la ley constatada, más que tardíamente.

La técnica inicial consistió en presentar una tablita de 50 x 12, que se empuja sobre un rodillo cilíndrico de 4.5 cms. de diametro por 30 cms. de largo, o 2.2 cms. por 30 cms. a los que se agregó una barra de sección cuadrada (los lados siendo de 2.3 cms. con un largo de 50 cms.) y un prisma octagonal (2.3 cms. de lado). Un tapete antiderrapante facilita las maniobras y una cinta métrica está a la disposición del sujeto. La primera cuestión consiste en anunciar que se va a presionar la tabla hasta un punto indicado (20, 80, 40 cms. etc., con marcas de partida y de llegada, colocadas por el experimentador) y en hacer prever hasta dónde llegará el rodillo. Después de las anticipaciones, se pasa a las constataciones, hasta que el niño haya proporcionado su máxima precisión (la relación de 1 a 2 no se encuentra a todas las edades), luego se pregunta la explicación: "¿Por qué la mitad del trayecto de la tabla? ¿Se podría hacer algo para obtener 1/3 en lugar de 1/2?".

Primero, se emplean pequeños rodillos y después se pasa a grandes, para ver si hay generalización. En el caso del cuadrado o del octágono. se plantean las mismas preguntas, pero con la ventaja de contar en unidades, "¿cuántos lados?" inherentes al mismo rodillo, pero se hace precisar el avance de la tabla en términos de lados, en relación a la barra y a la tabla.

En una segunda técnica (casi todos los sujetos citados) se agregó un soporte que permitía hacer rodar el octágono sobre sí mismo, sin avanzar. Entonces, se hace anticipar, constatar y explicar los movimientos de la tablita sobre el prisma octàgonal suspendido y se les hace comparar con lo que pasa en la mesa, lo que, como veremos, es de una gran ayuda al principio del estadio III, pero que prácticamente no tiene ningún efecto en los niveles anteriores.

§/1- EL ESTADIO I- Todos los sujetos de 4 a 6 años en promedio, admiten que la tablita siempre va más lejos que el rodillo, pero todavía sólo se trata de la generalización inductiva de una relación cualitativa, porque ese "más lejos" aún no está cuantificado en términos de mitad o doble. Por otra parte, es interesante distinguir un nivel IA, donde el sujeto, que todavía no se da cuenta de las referencias exteriores, se imagina que el rodillo se queda atrás mientras que la tabla avanza:

ROB (4;6): "Si empujo la tabla sobre el rodillo (octagonal) hasta allá (60 cms.), ¿Qué va a pasar? -*Creo, que después del camino va a hacer eso* (avanza el rodillo hasta la llegada de la tabla). -(El rodillo) *allí y* (la tabla) *allá*. -Exp. ¿Y si regreso hacia atrás? (camino más largo del rodillo) -Mira (nueva exp.): ¿cuál ha recorrido el camino más largo? -*La tabla*. -¿Y el más corto? -*El rodillo*". Entonces se llega a generalizaciones bastante buenas, no lejos del centro, hasta el momento en que lo conducen al retroceso del rodillo: "Si empujo la tabla por allá ¿a dónde va el rodillo? -*Hacia allá* (dirección inversa). -Mira (Exp.) ¿Qué fue lo que pasó? (Señala justo)". Se toma otro rodillo, esta vez redondo: "¡*Rueda bien*! -Si empujo la tabla hacia allá, ¿por dónde va el rodillo? (Dirección inversa). -Mira, ¿te equivocaste? -*De caminar así* (trata de hacer caminar la tabla en un sentido y el rodillo en otro)".

MIR (6;0). Se hace una demostración de movimiento de la tabla de 35 cms. luego se pone un extremo color rosa sobre la línea de una nueva partida de 35 cms. al preguntar a dónde irá el rodillo: MIR indica un retroceso de 20 cms. y lo señala hasta sobre el tapete. Se da el ejemplo: "¿Es como tú lo pensaste? -*Sí*. -Pero no fue allá (retro-

ceso). -*Allá, no.* -¿Y me puedes mostrar en dónde estaba primero? -(ella retrocede de 10 cms., su punto de partida)". En seguida y a pesar de los índices, ella muestra como trayecto de la tabla, la extremidad posterior de la partida y la extremidad anterior a la llegada, lo que duplica su camino, pero muestra la poca capacidad del sujeto para apoyarse en las referencias significativas.

CAT (7;0), a pesar de su edad, se limita, después de una previsión de igualdad a decir que "*la tabla ha recorrido más, ha ido más lejos que la marca*"; luego, agrega "*con un pequeño paso*", (con las mismas evaluaciones sobre la mesa que entre los móviles, sin ninguna composición de los movimientos). Se le hizo empujar otro rodillo sin la tabla: "Y ahora si se pone la tabla encima: "*Si se le da vuelta así, la tabla va a retroceder, va a avanzar hacia atrás... no hacia adelante*".

El primer punto a notar es que no hay previsión (ROB y CAT) del avance de la tabla sobre el rodillo. Pero una vez hechas las constataciones, la generalización es fácil, pero queda toda cualitativa, entre una ganacia de "un pequeño paso" y de "mucho más lejos". Además, como estos sujetos no utilizan ninguna referencia (ver a MIR, a pesar de los listones de color rosa) fuera de la distancia que existe entre los dos móviles, llegan a suponer un retroceso del rodillo, y la idea dura hasta en CAT, a pesar de sus 7 años. Ven en ello una dirección eventualmente inversa entre los movimientos de la tabla y del rodillo. Se ve que tanto, en estas reacciones iniciales y por consiguiente instructivas, el sujeto está lejos de la relación según la cual la marcha del rodillo implica la de la tabla, puesto que en este nivel IA, sus trayectos son incluso concebidos como de sentido opuesto.

El nivel IB es intermediario entre el anterior (excepto estos retrocesos) y el nivel IIA, donde el avance de la tabla es cuantificado sistemáticamente.

CRI (5;6) prevé que el rodillo llegará al mismo punto que la tabla. Luego, al constatar el avance de ésta, explica: "*Porque la tabla es más grande y el rodillo se ve así más pequeño* (compara los largos)". Después, adivina más o menos el centro, y luego, cuando se toma un rodillo grueso, un poco más lejos que el centro: (Exp.) ¿Es correcto? -*No, porque el rodillo es demasiado grande*".

STE (6;3), después de la constatación, apunta más o menos al centro para los trayectos de 20 a 50 cms. pero, para 70, indica las 3/4 partes.

JEL (6;6) es prudente en sus previsiones: "*Todavía no lo sé*". Luego, prevé que la tabla llegará al "*centro porque hay varios planos* (caras octagonales) *y cuando hay* (rodándolo encima) *algo grande* (la tabla), *siempre va al centro*". Un cilíndro de 6 cms. de diámetro "*rodará más rápidamente*", pero aquél se quedará en el centro "*porque es redondo y es la misma tabla*". Con un cilindro de 4 cms. en cambio, indica las 2/3 partes sin razón alguna, pero con dificultad para marcar. El rebasamiento de la tabla se debe a que "*no rueda sino avanza, mientras que el círculo va hacia atrás.* -¿No

avanza? -*No... sí* (pero) *la tabla va más aprisa porque es plana y el círculo es redondo.* -¿Y qué importa eso? -*Porque la tabla es más larga y el círculo es más corto.* -¿Y si se cortara la tabla? -*El círculo vendría acá* (un poco más lejos). -(Exp.) *Se diría que el círculo va hacia atrás.* -¿No se puede hacer que queden juntos? -*No, porque la tabla es más rápida. Si caminara menos aprisa, entonces quedarían juntos*". JEL llega a previsiones exactas de mitades y pasa así al estadio II.

Estas respuestas son interesantes desde dos puntos de vista. En primer lugar, los sujetos creen todavía (sin hablar ya de retroceso del rodillo, sino que el principio sigue igual), que los dos movimientos, el de la tabla y del rodillo, son independientes uno del otro, lo que ya no será el caso en el nivel IIA: la tabla va más aprisa "porque es más grande (CRI)", o "porque es más larga" (JEL), y si se disminuyera su velocidad, los dos "quedarían juntos" (JEL). En segundo lugar, y esto durará en el transcurso del estadio II, el retraso del rodillo se debe al hecho de que, siendo "redondo", su circunferencia se orienta hacia abajo, de tal suerte que "va hacia atras" (JEL), lo que recuerda los retrocesos de IA, pero expresa simplemente la dificultad de traducir este movimiento circular en un trayecto lineal. Y esto dura aún en el momento de la constatación: "se diría que va hacia atrás" (JEL).

§/2- EL ESTADIO II- Desde el nivel IIA, los movimientos de los dos móviles son solidarios, lo que todavía no significa para nada la comprensión del movimiento rotativo, sino simplemente de una dependencia. Por otra parte, ya que también se observan progresos en cuanto a los puntos de referencia (aunque en IIA todavía exista frecuentemente una indiferencia entre el rebasamiento y el trayecto), los sujetos llegan a una cuantificación generalizable fundada en la mitad:

FAB (7;6) todavía prevé que el rodillo irá tan lejos como la tabla, y, a pesar de la constatación, vuelve a esta falsa anticipación "*porque ruedan juntos*", lo que, en sí, es un progreso sobre la idea de la independencia. No obstante, ella encuentra en seguida que "*es normal*" volver a encontrar siempre, que el "*rodillo va a caer en el centro*", pero no descubre ninguna explicación.

PIC (7;8), luego de la constatación, indica cada vez "*la mitad*", pero sin explicación. Entonces, se le presenta el prisma suspendido, del que dice: "*se le puede rodar, y luego no se mueve, pero eso también hace avanzar la tabla*", lo que, de nuevo, es el reconocimiento de una dependencia. Pero el interés es que, al no encontrar más la regla de la mitad (porque la tabla da "2 pasos" o "4 pasos" cuando el rodillo octagonal da también 2 ó 4), ella renuncia a ello alegremente cuando se regresa sobre la mesa sin suspensión: "*4 pasos y 4 pasos.* -¿Llegaron al mismo lugar? -*Sí.* -Pero mira. -*La tabla fue más lejos.* -¿Iba más rápido o iba igual? -*Iba igual*". Se ve cuántas generalizaciones siguen siendo extensivas, tanto en el error como en el acierto.

VAD (8;9) prevé que la tabla irá "*un poco más lejos*", pero después de las constataciones, que "*la tabla siempre recorre lo doble que el rodillo.* -¿por qué? -*No lo sé*". El dispositivo de suspensión no le aclara nada, pero mantiene la diferencia con lo que sucede en la mesa, donde la tabla "*recorre lo doble*". Se trata de ayudarle, evocando un caracol que camina sobre una tabla que también está en movimiento, y reconoce que, para ir más aprisa, hay que "*tomar la tabla y al mismo tiempo caminar*". Entonces, "¿cuando los dos avanzan al mismo tiempo, caminan más aprisa? -*Sí.* -¿Es que eso (la suspensión) se parece a lo que se hace en el tapete? -*Sí, un poco, porque mientras la tabla camina, el rodillo también camina*". Por tanto, sí hay dependencia, pero no se precisa su sentido.

SYL (8;3): "*La tabla siempre da un paso más que el rodillo.* -¿Para 2? -*4 pasos* (después de una previsión de igualdad-. -¿Para 3? -*6 pasos*". Explicación: "*Porque el rodillo es redondo, entonces rueda... y la tabla queda encima*", por lo que el rodillo regresa (en parte) sobre sí mismo al rodar, y de ahí su retraso. Con la suspensión, SYL, como PIC, encuentran una ley de igualdad y la quieren generalizar de inmediato a las situaciones ordinarias.

FER (8;11): la misma explicación: "*La tabla está encima, el rodillo abajo, y como la tabla es larga* (y no redonda) *va más lejos*".

BIR (8;11), en cambio, comienza por lo que parece ser un perfecto modelo de movimiento rotativo: "*El rodillo fue menos lejos que la tabla porque la tabla avanza sobre el rodillo y el rodillo avanza sobre la mesa... El rodillo hace avanzar la tabla: la tabla llegará allá*". Pero es sólo apariencia y BIR precisa su pensamiento al decir que si la tabla recorre así "*lo doble que el rodillo*", es porque éste "*da vueltas sobre sí mismo* (de ahí la relación 1 a 2), *mientras que la tabla es plana y el rodillo redondo, y la tabla avanza así* (gesto de traslado) *y el rodillo avanza rodando*", (un gesto claro de epicicloide curvo y no cicloide, lo que, efectivamente, frenaría la "marcha").

LUR (9;1) prevé también la igualdad de los trayectos, pero, muy sorprendido de lo contrario, explica inmediatamente que es por el hecho de que "*el rodillo rodó y la tabla avanzó*", teniendo esta oposición el mismo sentido que las de BIR en cuanto al dispositivo de suspensión, y no introduce ningún cambio en la comprensión.

Examinemos un poco más, para comparar a estos sujetos con los del nivel IIB. Por regla general, este nivel es aquél en que esos sujetos, sin haber alcanzado todavía las nociones de movimientos o las velocidades relativas, comienzan a tener en cuenta los puntos de referencia espaciales de dos sistemas de referencia a la vez. Esta adquisición se manifiesta en el presente caso (entre otros) por el hecho de que las indicaciones sobre el trayecto de los dos móviles se vuelven precisas y ya no se limitan, como frecuentemente ocurría en el nivel IIA, a utilizar la sola superación para indicar el trayecto de la tabla. Además, la generalización inductiva de la ley de la duplicación del camino recorrido por esta tabla, se vuelve más completa, sin que el sujeto ceda a las contrasugestiones o vacile en presencia de diferencias demasiado grandes entre las formas o

diámetros de los rodillos. En cambio, en lo que se refiere a la razón de esta ley, las explicaciones no son mejores que las que se dan en el nivel IIA:

AST (10;7) encuentra rápidamente la ley: "*¡Ah, es la mitad!*", pero no puede agregar más que "*el rodillo no puede seguir siempre*". En cambio, con la barra cuadrada: "*cuando se le da vuelta, es normal que la tabla avance...* (pero) *cuando se avanza de un cuarto* (un lado de la barra), *este lado va hacia abajo* (contra el tapete), *lo desajusta todo y la tabla tiene el tiempo de recorrer un cuarto de más*". La tabla recorre, entonces, un cuarto de más en relación al contacto y dos en relación al tapete.

ROD (10;2) empieza con palabras bastante primitivas: "*La tabla avanza más porque hay que empujarla, el rodillo más lentamente porque avanza casi por sí solo*", pero la explicación se orienta en seguida hacia el modelo de lo "redondo" y lo "plano": "*porque el rodillo debe dar vuelta y la tabla debe avanzar, entonces, como resbala un poco, se va solo... porque el rodillo no es plano: si hubieran dos tablas, una sobre la otra, no pasaría lo mismo*".

ODI (10;10), en cambio, parece estar cerca del movimiento rotativo: "*cuando este rodillo rueda, eso hace accionar la tabla, pero ésta, puede ir más aprisa.* -¿Y se podría hacer que el rodillo no llegara más que a la tercera parte? -*Se necesitaría una tabla más grande: La tabla va más lejos y eso le impide al rodillo continuar*". Barra cuadrada: "*Siempre hará lo mismo: la barra va menos rápido, porque empuja la tabla* (el movimiento rotativo se reduce aquí a una pérdida de velocidad por parte del móvil activo, pero entonces ve que los dos son activos) *no, la tabla empuja a la barra, pero ésta es el sostén de la tabla.* -¿Entonces? -*El cuadrado avanzará y eso hará avanzar a la tabla.* -¿Y si se empuja la tabla? -*Entonces la tabla hará avanzar al cuadrado*". El dispositivo de suspensión no le ayuda en nada para comprender: "*¡No!*". Por fin, parece estar entendiendo: "*Si hay una rueda que hace avanzar a la tabla, ésta recorre lo doble, porque el rodillo la hace ir más aprisa cuando se mueve.* -...Pero, ¿por qué 2 veces más y no 3 ó 4 veces? -(Piensa). *Eso no lo sé*".

GIL (11;11) se queda en el modelo de lo cíclico y de lo lineal: "*El rodillo dio vueltas y la tabla se deslizó: cuando se le da vuelta, la tabla va derecho y al mismo tiempo* (= por consiguiente) *recorre 2, La tabla recorre lo doble porque es recta*". Se le describe un caracol que camina sobre una tablita que avanza en el mismo sentido: "¿La tabla sobre el rodillo, no se parece a esto? -*Sí, un poco* (después de haber dicho que para nada), *la tabla avanza también sobre el rodillo*". Pero no ve más que ODI, una explicación de "lo doble".

La novedad del estadio II reside, entonces, en el descubrimiento de la solidaridad de los dos movimientos, mientras que en el nivel IB todavía el rodillo y la tabla son dos móviles independientes, de los cuales, uno es simplemente más grande, más largo, etc., y por lo tanto, va más rápidamente, pero bastaría recortarlo o frenarlo para que ambos queden juntos. La primera consecuencia de esta dependencia es que la ley de la relación de simple a doble se generaliza de manera completa (salvo algunos efectos de contrasugestión), puesto que aun sin poder explicarlo en tanto que

relación numérica, su regularidad encuentra una razón de ser en el vínculo cinético de los dos móviles.

Comenzando con este vínculo, FAB (IIA) se limita a constatar que "ruedan juntos", pero concluye primero que deberán llegar al mismo punto. PIC es más precisa y constata que, suspendido o no el rodillo "hace avanzar a la tabla", pero ella también concluirá en seguida la paridad de las llegadas, lo que querrá hacer después de utilizar el dispositivo en suspensión. La mayoría de los sujetos, a partir del nivel IIA, ven igualmente que, como lo dice lo más explícitamente BIR, "la tabla avanza sobre el rodillo y el rodillo sobre la mesa". Sólo VAD no precisa el sentido: "mientras la tabla camina, el rodillo camina también" y ROD en IIB invoca como factor el hecho de que se empuja la tabla y que ésta actúa poco sobre el rodillo. Pero aparte de este último sujeto (que, además, cambia en seguida de explicación), todos los demás podrían encontrar la razón de la ley del doble en la acción del rodillo sobre la tabla, y ODI parece estar a dos pasos de esta comprensión cuando dice: "el rodillo hace accionar a la tabla, pero ésta puede ir más rápido", excepto que él, precisamente, disocia este vínculo vislumbrado al decir: "pero la tabla puede", en lugar de "por lo tanto, la tabla debe". Y sin embargo, en seguida, analiza correctamente la acción recíproca de los dos móviles desde el punto de vista cinético, mientras que desde el punto de vista dinámico, invoca curiosamente una pérdida de velocidad del móvil activo.

¿Cuál es, pues, en el estadio II, el obstáculo que impide a estos sujetos comprender, a pesar de su aceptación unánime de la acción del rodillo, que esta rotación engendra un trayecto del mismo valor sobre la mesa (de ahí la relación 2 1/2 1)? Es esencialmente un defecto de generalización constructiva que retarda doblemente la puesta en equivalencia de la circunferencia del rodillo con un trayecto lineal de éste sobre la mesa y de esta misma circunferencia con el traslado que ella impone al rodar a la tabla.

A este respecto, el modelo tan frecuente (de JEL en el nivel IB a SYL, FER, BIR y LUR en IIA y a AST, ROD y GIL en IIB) de la oposición entre lo recto y curvo (o lo plano y lo redondo, etc.) es altamente significativo. Cuando la extremidad anterior de la tabla, o sea A 1, se encuentra en la cúspide de la circunferencia o del diametro del rodillo, o sea A 2, la tabla, al avanzar, recorre el trayecto A1B1, mientras que el punto A 2 de la cúspide del rodillo "va hacia abajo" como dice AST, es decir desciende hacia el tapete: de ahí la impresión de que la tabla avanza cuando el rodillo retrocede (JEL), "rueda" (SYL), "Da vueltas sobre sí mismo" (BIR) y "lo desajusta todo" (AST). Ahora, lo que olvidan completamente

estos sujetos es que, frente al punto A2 en la cúspide del rodillo, hay una A'2 simétrica a su base, y que fue cuando el punto A2 desciende un arco A2B2, la simétrica sube la misma distancia A'2B'2, que está inscrita sobre la misma mesa bajo la forma de una línea recta, igual a A1B1: de ahí un trayecto hacia adelante del rodillo que es de A'2B'2 = A1B1. Además, estos sujetos olvidan que si la tabla avanzó A1B1, fue precisamente porque el rodillo rodó desde A2B2, una longitud igual a A'2B'2, de tal suerte que la tabla se beneficia al mismo tiempo de la rotación del rodillo sobre la mesa y de su propio avance, debido a la misma rotación: de ahí la ley de la relación de 2 a 1. Y por lo tanto, estos niños dicen bien que es el rodillo que hace avanzar a la tabla, pero sin traducir en términos de longitudes iguales la rotación A2B2 (= A'2B'2) y el traslado A1B1. De ello resulta que, a pesar de afirmar el papel causal del rodillo sobre el movimiento de la tabla, no pueden comprender ni por qué hay un rebasamiento, ni, sobre todo, por qué es de 2 a 1. Estos dos hechos centrales quedan así a nivel de simples observables constatadas y de generalización inductiva, mientras que la clave del problema, es decir, la equivalencia de las longitudes en rotación y en traslado, exigiría una generalización constructiva, precisando el mecanismo según el cual "cuando el rodillo rueda, eso hace accionar la tabla", como lo dice tan bien ODI, comprendiéndolo tan mal.

§/3- EL ESTADIO III- No es sino el estadio de 11 a 12 años donde las operaciones hipotético-deductivas permiten, en otros dominios, la comprensión de los movimientos relativos, que el problema anterior es resuelto por los sujetos. Y es interesante tratar de ver de cerca cómo lo llegan a hacer. 'Vamos a ver primero dos casos intermediarios entre los niveles IIB y III.

NAR (11;11) comienza por precisar que "*el rodillo avanza gracias a la tabla*", siendo ésta empujada por el sujeto, y da una explicación del nivel IIB: "*El rodillo rueda sobre sí mismo* (mientras que) *la tabla avanza siempre*". Pero como reconoce que eso no explica la relación 2 a 1, se le enseña la suspensión y eso le aclara: "*cuando el rodillo avanza sobre el suelo, hace 2: yo agrego el paso del rodillo* (sobre el suelo), *más el paso de la tabla* (sobre el rodillo)... *y después allí* (dispositivo) *el rodillo no avanza sobre el tapete, por eso la tabla avanza* (solamente) *de 1. ¡Ah, sí, cuando uno descubre eso, parece fácil!*".

FRI (12;3) enuncia la ley y la explica en términos tautológicos. "Sí, pero ¿cómo se hace? ¿En relación a qué avanza la tabla? -*En relación a cada lado* (del octágono), *mientras que el rodillo vuelve a sí mismo, la tabla va hacia adelante, pero el rodillo regresa y hace un trayecto más corto*". Es, entonces, la explicación del tipo del nivel IIB, pero el dispositivo de suspensión lo aclara, porque el octágono "*da vueltas sin avanzar*", mientras que "*la tabla puede avanzar*" cuando el prisma no hace más que "*dar vueltas*". "¿Y cuando está sobre la mesa? -*El rodillo avanza y al mismo tiempo*

empuja la tabla... Ah, ya entendí, la tabla no avanza más que el rodillo (mientras éste la empuja), *pero el rodillo, como avanza* (sobre la mesa y por su lado), *duplica la longitud*".

Entre los cuatro sujetos siguientes, en cambio, sólo el primero ha visto el dispositivo de rotación en suspensión, pero su razonamiento va más lejos en el análisis y recuerda mucho lo que simbólicamente expusimos al final del párrafo 2:

LAM (12;4) enuncia la ley, sin ver su necesidad, en presencia del dispositivo de suspensión, y se limita a describir las diferencias con la situación en el suelo. En cambio, a la hora de una estimación del valor de un doble, exclama: "*Ah, creo que comprendí. Cuando la tabla da un paso hacia adelante, esto* (rodillo) *también da un paso, y eso lo duplica automáticamente: cuando la tabla avanza sobre ese punto* (A2 en nuestro simbolismo), *al mismo tiempo, el punto avanza* (A2 B2), *entonces se duplica. La tabla avanza también, 2 cms. sobre el tapete y 2 cms. allí* (A1 B1). -¿Y con eso (prisma cuadrado y tabla)? -*Es el mismo fenómeno: el punto de apoyo* (A2) *avanza también, se duplica automáticamente*".

FRA (12;3) (técnica I) constata rápidamente que el rodillo "*se para en medio*" del avance de la tabla y que "*hay que tomar siempre la mitad*". Pero su única explicación es que "*la tabla va más rápido.* -¿Por qué dos veces? -*No lo sé*". Con la barra cuadrada: "*cuando le doy vuelta, la tabla rebasa a la barra. La tabla avanzará* (cada vez más)... *cada vez que se le dé vuelta a la barra... La tabla avanza lo ancho de la barra: siempre da una vuelta de más.* -¿Y después de 4 pasos? -*La tabla estará más o menos allí y la barra a la mitad.* -¿por qué la mitad? -*Cuando se le da vuelta* (al rodillo), *la tabla avanza el largo de la barra... Cada uno recorre la misma distancia: cuando la barra avanza a uno, la tabla avanza de a... dos.* -¿Cómo es eso? -*Porque la barra da vuelta, lleva a la tabla hasta acá, llega siempre 2 cms. después* (= más allá) *que la barra.* -¿Siempre? -*Sí, cuando la barra estará en 4, la tabla estará en 8.* -¿Cómo es eso? -*Cuando parto de allí, hace esto: la barra da una vuelta y la tabla da 2, porque la barra la lleva... da una vuelta de más*". Las mismas reacciones con los otros rodillos: "¿Por qué no 3 veces más rápido? ¿Depende del tamaño? -(Vacila), y después: *Es igual que los otros, siempre va 2 veces más lejos.* -¿También uno grueso? ¿No sería posible 3 veces? *No, la tabla siempre avanza dando una vuelta de más siempre*".

INA (13;3) prevé "*a la mitad*", pero vacila en cuanto a otras longitudes. A partir de la primera verificación: "*Creo que siempre es la mitad, porque el rodillo avanza de allí* (un lado) *cada vez que se le da vuelta, por lo que la tabla avanza siempre lo doble*". Prisma cuadrado: "*Si la barra da vuelta, la tabla forzosamente está más lejos, porque la barra da vuelta* (¡avanza!) *también, entonces,* (la tabla) *queda allí* (cúspide A2 del rodillo en tanto que se desplaza hacia B2), *por lo que siempre recorre lo doble*".

STA (13;4): "¿Es siempre lo doble? -*Sí, es lógico: si empujo el rodillo allá, la tabla recorrerá lo doble: cada plano* (lados del octágono) *empuja cierta longitud. El rodillo hace avanzar a la tabla y la tabla hace avanzar al rodillo.* -Da un sólo paso. -*Mira: empujé el rodillo y recorrió una longitud plana y eso hizo avanzar a la tabla dos veces: una vez soy yo quien hace avanzar al rodillo y la segunda vez es el rodillo que hace avanzar a la tabla*".

Se ve claramente en qué consiste la generalización constructiva que, finalmente, se manifiesta en estos sujetos y se ve tanto mejor cuanto que NAR y FRI llegan a ella mediante la diferenciación que les impone (a condición de comprenderla) el dispositivo del octágono suspendido, mientras que, de LAM a STA, hay una integración inmediata de los dos procesos, que el dispositivo disocia. Pero estos dos procesos que no consisten más que en "rodar" y "avanzar", parecen tan evidentemente solidarios que se necesitan señalar todas las dificultades en nuestra introducción para explicar su vínculo tardío (por ejemplo el hecho de que para INA "la barra da vueltas también", significa que ésta avanza por su lado, mientras que en el nivel IIB "dar vuelta" se oponía a "avanzar").

En realidad, NAR y FRI necesitan ver el dispositivo de suspensión para comprender: 1) que el rodillo puede hacer avanzar a la tabla al dar vuelta sobre sí mismo cuando no está sobre la mesa; y 2) que, por consecuencia, una vez en el tapete, el rodillo efectuará simultáneamente las dos acciones distintas: de empujar a la tabla hacia adelante y recorrer él mismo una distancia igual. Con LAM, FRA, INA y STA, las cosas parecen ser más simples y, como lo dice STA, "es lógico" agregar el desplazamiento del rodillo mismo, al que éste le imprime a la tabla. Pero como lo muestra el análisis de LAM, y en parte el de INA (tan cerca del esquema simbólico al final del segundo párrafo), las cosas son más complicadas, porque es sobre dos puntos a la vez que hay que traducir la rotación del rodillo en términos de traslados con relación al referencial externo, integrándole el movimiento de la tabla sobre el rodillo mismo: por una parte, es la rotación del punto A2 en la cúspide del rodillo la que engendra el traslado A1 B1 de la tabla, pero al mismo tiempo y de manera indisociable, es la rotación del punto simétrico A'2 en la base del rodillo, la que engendra su avance lineal sobre la mesa y cuyo valor es el mismo qué A2B2 y A1B1. Ahora, los sujetos del nivel IIB veían bien que el rodillo empuja a la tabla en A2 y que avanza también en A'2 como una especie de retroceso o de "vuelta sobre sí mismo" (BIR en IIA). En otras palabras, no ven que la rotación del rodillo se inscribe de un modo lineal, pero de manera separada y solidaria a la vez, sobre los dos planos entre los cuales da vuelta: debajo de la tabla en A, B, y sobre el suelo en A'nB', el avance de la tabla siendo, por lo tanto, de, B + An Bn, por lo tanto de 2A'n B'n, cuando el del rodillo no es sino de A'nB'n.

De que esta integración de dos procesos distintos en un solo constituye una generalización está bien claro, como en toda composición de movimiento relativo puesto que consiste en aplicar a dos desplazamientos lo que se admite para uno, a saber, en este caso,

la relación entre una rotación y un traslado, así como la evaluación de éste último con respecto a un referencial común. Pero la dificultad de esta generalización tardía y su carácter constructivo, en oposición a las simples generalizaciones inductivas de la ley 2 a 1, sin la comprensión de sus motivos, se deben a la necesidad de efectuar diferenciaciones y reintegraciones en un mecanismo complejo cuya apariencia perceptiva es la de una afectación recíproca, que debería de dar dos velocidades iguales, como las de un ciclista de su máquina (cf. FAB y PIC en IIA, cuando descubren la relación de dependencia). En realidad, es la diferenciación que aquí parece ser la operación más difícil a ejecutar, ya que se trata de disociar los dos efectos distintos de la rotación del rodillo, su efecto sobre la tabla y su desplazamiento sobre el suelo, más que de generalización. Pero, sin negar el papel de la abstracción, necesaria para toda generalización, conviene no obstante insistir sobre el carácter generalizador de una tal diferenciación. Consiste, de hecho, en comprender que la acción de la rotación se ejerce sobre *todos los puntos* de la circunferencia del rodillo, mientras que en el estadio II, esto queda incomprendido: todavía, existen para los sujetos de los niveles IIA y IIB, los puntos en donde el rodillo avanza, pero también aquellos que marcan simplemente un descenso o un "sobre sí mismo", como lo dice BIR, quien indica como trayecto un epicicloide y no un cicloide, por lo tanto, un desplazamiento con curvas, es decir, un regreso hacia atrás. Pero generalizar el avance de una rotación sobre un plano no es tan simple, puesto que sin la intuición del cicloide (ordinaria y precisamente retardado hasta el estadio III), una parte de los puntos de un círculo en movimiento parece efectivamente retroceder, mientras que los otros avanzan. En una palabra, la aparición tardía de la generalización constructiva en el estadio III y el hecho de que sólo entonces ella agrega al "siempre" de la generalización inductiva la nueva propiedad de una necesidad intrínseca ("automáticamente", dice LAM, "es lógico", piensa STA, o incluso "eso parece fácil", reconoce finalmente NAR, como en el caso de todas las evidencias), se revelan al análisis como bastante naturales en este difícil problema.

CAPITULO X
LAS OBSERVABLES Y LAS "RAZONES" EN LOS PROBLEMAS DE POSIBILIDADES

con Al Moreau

Los capítulos anteriores nos acostumbraron a la idea de que las generalizaciones inductivas o puramente extensivas no se refieren más que a las observables, las cuales se limitan a destacar los rasgos comunes para reencontrarlos en situaciones análogas, mientras que las generalizaciones constructivas tienden a insertar estas relaciones legales en estructuras, que por sí mismas, les conferirán una cierta necesidad, lo que equivale a darles una "razón". En este último caso, la generalidad extensiva, es decir el "siempre", resulta de esta necesidad en lugar de engendrarla, de tal suerte, que esta "extensión", fundada en la "comprensión", ya no tiene el mismo sentido que en la generalización inductiva y no procede por filiación genética.

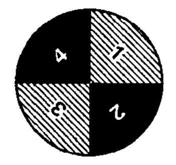
Ahora bien, si estas afirmaciones nos han parecido relativamente evidentes en los problemas de longitudes espaciales de los capítulos V y VII o de los movimientos de los capítulos VIII y IX, donde la distinción de las observables y de sus razones es fácil e incluso, en ciertos casos (cap. IX), sorprendentemente obvia, uno se puede preguntar qué resultará de estas oposiciones en cuestiones de probabilidad, o más bien, de posibilidades (porque, en lo que sigue, no intervendrán probabilidades en un sentido técnico), por el hecho de que en el campo de los juegos de azar, la constatación de las observables y el establecimiento de sus regularidades parecen implicar, desde el principio, una cierta comprensión de las relaciones en juego.

El problema estudiado en este capítulo será un problema de ruleta, pero sin afectar, o por lo menos no directamente, la probabilidad de ganancias: la primera cuestión central será en cambio, prever cuántas fichas se recibirán en caso de ganar. La ley consiste en que para *n* posibilidades, si la que se elige sale ganando, la ganancia será de *n-1* (por ej, 1 ficha para 2 casos posibles, 3 para 4, 7 para 8 y 35 para 36). Pero una vez establecidas estas primeras regularidades, faltará encontrarle la razón: de ahí el segundo

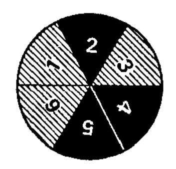
problema central, en el que se tratará de ver cómo se articula con el anterior, lo que consiste en descubrir si estas ganancias aumentan con la dificultad para ganar o si son inversamente correlativas a su facilidad; es aquí donde las cuestiones en juego tocan las evaluaciones probabilísticas del sujeto, cualquiera que sea su naturaleza.

El material empleado se compone de una pequeña ruleta (de casino) y de 4 combinaciones diferentes, que sirven de tapete para apostar. Se puede jugar sobre cada combinación: ya sea un número par o impar, negro o rojo.
-La primera combinación (comb. I) tiene 4 números: de 1 a 4.
-La segunda combinación (comb. II) tiene 6 números: de 1 a 6.
-La tercera combinación (comb. III) tiene 8 núms: de 1 a 8.
-La cuarta combinación (comb. IV) tiene 36 núms: de 1 a 36.

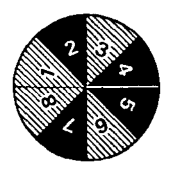
Por cada una de estas 4 combinaciones, se instala un disco alrededor del eje central de la ruleta, en el que sólo se inscriben los números correspondientes a la combinación utilizada.



Disco corresp. a la combinación I..



Disco corresp. a la comb. II.



Disco corresp. a la comb. III.

La interrogación se inicia con una descripción del funcionamiento del material: ruleta con su bolita, el empleo de la combinación destinada a apostar (generalmente, la combinación I, que es la más fácil para empezar). Se explica el principio del juego: colocar una ficha sobre una casilla (ya sea un número, un color, etc.); tirar la bolita. Cuando la ruleta se detiene ante el número o color, etc., por el que se ha apostado, se gana. En caso contrario, se pierde. Se insiste sobre el hecho de que ganar o perder no tiene importancia para el juego, sino que lo esencial es prever con precisión cuántas fichas se recibirán en caso de ganar.

Posteriormente, se juega varias veces, hasta que se descubran las regularidades (para la combinación I por ejemplo, ganancia de 3 fichas por un número que gana, ganancia de 1 ficha por par o impar y por negro o rojo). Se le pide al niño que justifique estas regularidades; en caso de que no haya una explicación muy elaborada, se utiliza una segunda combinación (generalmente la comb. II). Cuando se descubran las nuevas regularidades (aquí, ganancia de 5 fichas por un número ganador), se pide de nuevo que justifique las diversas ganancias obtenidas en los distintos casos.

En seguida, después de descubrir la ley se averigua si el sujeto puede prever: a) cuántas fichas ganará con una combinación de 36 números (generalización de n); b) cuántas fichas ganará si apuesta 2 fichas y más (generalización multiplicativa). Luego, se le pide efectuar diversas comparaciones entre varios casos posibles bajo el criterio de la facilidad (o de la dificultad) de ganar: ejemplos de comparación: entre

jugar un número y jugar par sobre una misma combinación; entre jugar el mismo número sobre combinaciones distintas; y entre jugar par, pero sobre dos combinaciones diferentes...

En todos los casos, se tiene cuidado de controlar el sentido de las palabras o expresiones utilizadas por el niño: suerte, posibilidad, tener X probabilidades sobre *n*, etc.

Después de estas comparaciones que permiten estudiar la manipulación de las relaciones entre los casos favorables y los casos desfavorables, se hace derivar una ley sobre la distribución de las ganancias en la ruleta, que sea la más general y elaborada posible.

§/1- *EL INICIO DE LAS REGULARIDADES.*- En el transcurso de la etapa preoperatoria I, los sujetos no se esperan, al principio del juego, a que la distribución de las ganancias se verifique según una regla y la buscan sólo porque se les pide. Pero en el nivel IA, aparte de algunas hipótesis motivadas (de esperarse a ganar 4 fichas porque se apostó sobre el 4; o si es par, ganar un número par y si es impar, ganar uno impar), encontramos unas de un tipo particular, que aparecen en los siguientes ejemplos.

A los 7 años todavía, DEG, habiendo apostado sobre 1, 4 y 3, sin que salieran y sin que se le hubieran dado todavía las fichas, recibe 3 cuando apuesta 2 y que el 2 sale, él concluye: "*3, porque perdí 3; por un impar recibe 1 e interpreta:* "*porque todos los impares* (la corta serie que se le presenta) *comienzan por 1*". ELI también, habiendo recibido 3 al caer sobre el 3, al constatar que la ganacia de 3 se repite: "*¡Ah! sí, porque al principio cayó sobre el 3*" y en lo que sigue no encuentra más motivaciones.

Así, el problema que se plantea desde el principio consiste en saber si los comienzos más vacilantes de la generalización inductiva ya implican la búsqueda de los motivos y en qué consisten, comparados con los que elaborará la generalización constructiva en los niveles superiores. Se podría imaginar que en estos casos una búsqueda tal se impone por el hecho de que se trata no de una ley física, sino de una regla de juego desconocida y concebida como arbitraria. Solamente en ciertas situaciones físicas estudiadas a propósito de la contradicción (una rueda que da vuelta por sí misma hacia arriba, etc.), las relaciones por descubrir están igualmente ocultas y tampoco están accesibles más que mediante comparaciones sucesivas y no directamente en las observables aislables. Por lo tanto, esta situación no es específica a estas reglas de juego.

En estas condiciones podemos suponer que la búsqueda inicial de regularidades no inmediatamente constatables indica, en la medida en que conduzcan al éxito, los dos factores indisociables: 1) una actividad de relacionar, debido a las generalizaciones

constructivas anteriores (a veces sensomotrices) y no elaboradas en el momento del problema actual; 2) la determinación de las relaciones en juego y eso, gracias a la comparación de observables sucesivas, dadas y no contruidas, por tanto inherentes a la situación objetiva, consideradas en sus características independientes del sujeto.

Si éste es el camino que se seguirá, podemos suponer que la búsqueda de las causas de estas regularidades implicará, además, la elaboración de relaciones no "descubiertas" en el sentido anterior, sino construidas para insertar las regularidades en una estructura deductiva que les confiera una necesidad no dada en los hechos, sino debida a esta construcción en parte "inventada" (en oposición al descubrimiento de lo que existía antes de la constatación). Ahora, algunas hipótesis citadas del nivel IA, no entran ni en una ni en otra de estas dos categorías. Por un lado, no se trata de una utilización de las caraterísticas objetivas de la situación: ganar 3 por haber perdido 3 veces o porque al principio cayó sobre el 3, o ganar 1 porque sea el primero de los ejemplos presentados, constituyen referencias acerca del sujeto que juega o del sujeto imaginándose las reglas. Pero, por otro lado, este sujeto no es el sujeto epistémico que llegará a construir más adelante "estructuras deductivas": es el sujeto individual (por lo tanto egocéntrico), insertado en las peripecias de lo únicamente "vivido".

§/2- *EL NIVEL IB*.- En el transcurso de la subetapa IB, estas motivaciones "subjetivas" (en el sentido corriente del término y que, por tanto, no tiene nada que ver con las "causas" deductivas de los niveles superiores) desaparecen, aunque el sujeto siga creyendo al principio que las reglas por encontrar son arbitrarias (ver BEN, más abajo); a partir de las primeras constataciones busca entonces destacar las relaciones subyacentes con el fin de encontrar generalizaciones controlables. Es de cierto interés constatar que esta conductas comienzan a partir de este nivel, o sea, a partir de los 6 años.

SER (6;1) prevé (comb. I) una ganancia de 4 si su elección del 4 se confirma, de 2 para 2 y de 1 para 1. Sale el número 4 y se le dan 3: -"Por qué?" -"*No lo sé*". Se continúa: -"*¡De nuevo 3!*" -"¿Y si juegas el 3, cuánto ganas?" -"*6, porque 2 x 3 son 6... ¡Solamente pueden ser 3 siempre!*" Se continúa: "*¡Cada vez que se apuesta se ganan 3 fichas!*" "¿Y aquí (N.R. - P.I.)?"[22] "*Voy a probar con el rojo*". "¿Ganarás?" "*Puede ser que 3 fichas*". (Exp.) "*¡1!*" -"¿Por qué?" -"*No lo sé. Voy a vrobar con par*". -"¿Y ganarás?" -"*1 ficha. Arriba* (números 1-4) *se ganan 3 y abajo* (N.R. - P.I.) *se gana una ficha*". -"Estás

[22] N.R.: negros o rojos; P.I: Pares o impares.

segura?" -"*Sí, sí*". -"¿Es el azar o hay alguna explicación?" -"*Creo que hay una explicación*". -"¿La conoces?" -"*No... porque no es lo mismo: aquí son números y allí colores* (y hace la aclaración que los O.I. 'no están escritos en números')". Se pasa a la combinación II (6 números) y ella prevé una ganancia de 6 fichas: -"¿Es más fácil ganar ahora?". -"*No, es más difícil porque ahora son 6 en lugar de 4*". Ella apuesta el 5 y sale el 5. Le doy 5 fichas: -"*¡Ah!, porque es sobre el 5*". -"¿A cuál le vas a apostar?". -"*Al número 6*". -"¿Ganarás?". -"*¡5 fichas! Porque allí ya gané 5*". -"¿Por qué?". -"*Porque se agregan 2* (a la ganancia de la combinación I) *y allá* (los 6 números) *también se agregaron 2*". -"¿Se gana con 4 números?". -"*3*". -"¿Con 6?". -"*5*". -"¿Y allí (comb. III)?".-"*8, porque hay 8 números, ah no, se ganan 7 fichas*". -"¿Por qué?". -"*Aquí y aquí se quitó 1*". Se vuelve a hablar sobre la facilidad de ganar y ella confirma que es más fácil ganar sobre los números en la combinación I que en la II "*porque hay menos números*". Lo mismo sucede cuando se gana con un número par, "*es más fácil aquí* (comb. I) *que allí* (comb. II), *porque hay menos números*". -"Mira bien, cuando se juega por aquí (I), ¿dónde se tiene que parar la bolita para ganar?". -"*Allí* (2, 4)". -"¿Y aquí (comb. II)?". -"*allí* (2, 4 ó 6)". -"¿Y dónde es lo más fácil cuando se juega par?". -"*Allí* (combinación I), *porque hay menos números*". -"¿Cómo se explica que aquí (comb. I) se ganan 3 fichas, aquí (P.I. - N.R.) 1 ficha, allí (comb. II) 5 fichas?". -"*Porque se agregan 2* (a los números de la combinación anterior) *y siempre se quita 1 para dar las fichas*". -"¿Tú crees que las fichas que yo te doy tienen algo que ver con la facilidad de ganar?". -"*No*". -"¿Se puede decir: mientras más fácil sea, más fichas gano?". -"*No*". -"¿O mientras más fácil sea, menos se gana?". -"*Tampoco*". -"Fácil o difícil, se gana igual?". -"*Sí, es cierto*". -"¿Con esta combinación (36)?". -"*Hay muchos números, ganaré 35*". -"¿Y si jugaras "par"? ¿cuánto ganarías?". -"*No lo sé*". -"¿Una o más?". -"*Más, porque hay muchos números*".

BEN (6;2) comienza como SER, por generalizaciones locales: -"*Se ganan 3 porque dos veces ya he tenido 3 fichas*", pero cuando se pasa a 1 para los impares, ella tiene una impresión de arbitrariedad: "*Creo que lo haces según tu voluntad*". Pero después, varias comparaciones: -"¿Si juegas par?". -"*Una ficha*". "¿El número 4?". -"*3 fichas*". -"¿Un negro?". -"*1 ficha*". -"¿Cómo es eso?". -"*Porque aquí* (P.I. y N.R.) *hay menos diamantes que allí* (comb. I). *Sí, cuando hay 4 diamantes, se ganan 3 fichas... y allí hay menos*, (por lo tanto) *se gana 1 ficha*". -"¿Y allí, (comb. II) qué crees?". -"*Allí se ganarían 4 fichas y aquí* (P.I., etc.) *siempre 1 ficha*". -"¿Por qué 4?". -"*Naturalmente, el diamante es un poco más grande, por lo tanto, se ganan 4 y no 3*". (Exp.) -"*Ya comprendí, se ganan 5 porque hay 6 números*". -"¿Y si hay 8 (comb. III)?". -"*!7 fichas!*". En cuanto a la facilidad de ganar: "Si ganas sobre el 3 aquí (comb. I),¿recibes?". -"*3 fichas*". -"¿Y aquí (comb. II)?". -"*5 fichas*". -"¿Dónde es más fácil ganar, aquí o allí?". -"*Aquí* (comb. I) *hay menos números y sin embargo, se siente uno más seguro*". -"Las fichas que yo te doy, ¿tienen algo que ver con la facilidad de ganar?". -"*Sí, porque tú me das 3 fichas por éste y 5 por ése y allí es más fácil*". "Y par e impar, ¿dónde es más fácil ganar? -"*Allí* (comb. I), *porque hay menos números*".

BAL (7;3). Las mismas reacciones. Presenta todavía, como a este nivel, dificultades en cuanto a las relaciones multiplicativas. -"Si se pusieran 2 fichas a la vez, ¿se ganaría igual?". -"*No igual*". -"¿Cuanto?". -"*No lo sé*". Se hacen varias tiradas de números, duplicando cada vez la ganancia. -"¿Y si se apuestan 2 fichas sobre par?". -"*No se puede: se necesitarían 2 bolitas para que haya una sobre el 2 y una sobre el 4*". -"¿Pero se ganaría con una ficha si la bolita se detuviera en el 2 o en el 4?". -"*Sí*". -"¿Y ahora?". "*Con dos fichas no se puede: ¡la bolita no puede estar en el 2 y en el 4 al mismo tiempo!* . Para las facilidades de ganar, sacar el 3 de la combina-

ción I y de la combinación II "*las dos son igual de fáciles, porque es el mismo número*". Pero la bolita se detiene más fácilmente ante el 3 aquí (comb. I) o allí (comb. II)?". -"*Aquí* (comb. I), *porque hay menos números: allí* (I) *no quedan más que 3 y allí* (II) *5*" En cambio, para ganar sobre los pares, es más fácil en la II: -"*Aquí (2, 6, 4), porque hay más números pares, hay 3: si no hubiera el 5 y el 6, sería igual que allí* (I), *mientras que aquí, la bolita se puede detener en el 6 y el 2 y el 4*". -"¿Y para los negros y los rojos?". -"*Eso no ha cambiado, es fácil también*". -"¿Dónde es lo más fácil para ganar con el negro?". - "*Aquí* (II) *hay más negros que rojos. No, hay la misma cantidad*". -"¿Entonces, hay la misma oportunidad de ganar?". -"*Sí*". -"¿Y para los pares e impares?". "..." Aquí (I) hay 2 impares y 2 pares y allí (II) 3 impares y 3 pares. ¿Dónde es lo más fácil ganar?". - "¡*Aquí* (II)!".

Estos hechos nos remiten, de manera sugestiva al problema planteado anteriormente: ¿cuál es la diferencia entre las "relaciones" objetivas constitutivas de las generalizaciones inductivas y las "causas" que proporcionará en los niveles posteriores la generalización constructiva? El bello caso de SER nos muestra con claridad en qué consisten las primeras: al constatar una ganancia de 3, ella la generaliza con prudencia, hasta el momento en que es de 1 y ella nota una diferencia entre los dos casos en los que los datos están "*escritos en números*" o descritos en colores o en letras. Al pasar a la combinación II, prevé una ganancia mayor en relación con las nuevas dimensiones, luego, al constatar 5, se atiene a una simple repetición, después descubre la relación según la cual la ganancia es igual a n-1, si n = al número de las cifras dadas en I-III (número, que a su vez aumenta de a 2, como ella lo recalca espontáneamente). Finalmente, hay incluso generalización en 35 = 36 - 1. Ahora bien, por numerosas que sean estas etapas entre las inducciones locales al principio (repetición de 3 o de 1, etc.) y las generalizaciones más grandes, y por notables que sean las formas alcanzadas a los 6 años por éstas últimas (ver también a BEN), se ve que las relaciones en juego consisten en productos de constataciones que afectan a las observables concretas y dadas.

En cambio, cuando se trata de la facilidad de ganar, cuestión que conducirá (en los niveles posteriores) a la de la causa de las diferencias de ganancias, la situación es muy distinta, porque esta facilidad ya no se refiere a las observables sino a un sistema de posibilidades (y si éstas son realizables, lo realizable no se convierte en observable sino ¡después de realizado!). En efecto, aun sin proporcionar una relación cuantitativa entre los casos favorables y los posibles casos, está claro que la evaluación de la facilidad de las ganancias supone mínimamente una puesta en relación entre éstos y las no-ganacias. Ahora, las ganancias ya no son más que posibilidades, en tanto que coincidencias eventuales entre la detención, de la bolita y los puntos o elementos elegidos por el sujeto

y las no ganancias, lo son a fortiori, en tanto que no coincidencias y generalmente más frecuentes. ¿Cuál es, pues, la actitud de los sujetos de este nivel en cuanto a estas relaciones complejas?

A primera vista, existe en los tres sujetos anteriores una intuición precoz de la relación entre los casos favorables y los casos posibles, puesto que admiten sin vacilar que es más fácil ganar por ejemplo sobre el 3, si este número forma parte de un pequeño conjunto (de 4, como en la comb. I), que de uno más grande (de 6, u 8, como en II y III). Pero hay que distinguir con cuidado entre el caso en que un objeto único *X*, caracterizado en comprensión, se opone a los otros (*no-X*) y aquel en que una clase *A* se opone a su *A'* complementaria en un todo *B*. En el primero caso, en realidad, la acción misma impone ciertas intuiciones de lo fácil y de lo posible: por ejemplo, es más fácil rencontrar un objeto (o discernirlo, etc.) entre 4 que entre 8, y es este tipo de intuiciones el que caracteriza a nuestros sujetos. En cambio, una composición más precisa de las relaciones de posibilidad, exige un juego de conjuntos con sus inclusiones y sus complementariedades: pero aun sabiendo y afirmando que hay tantos números pares como impares (o negros como rojos), estos sujetos dicen, o bien que es más fácil ganar apostando "pares" con 4 elementos que con 6 u 8, "porque hay menos números" o bien al contrario, porque hay más pares con los 6 u 8 que con los 4. Recordemos, para ilustrar esta falta de relaciones cuantitativas, que en este mismo nivel también se encuentran los sujetos que admiten al sacar un objeto de una urna, la cual contiene 1 blanco y 2 rojos, se tiene más oportunidad de sacar el blanco, ¡puesto que representa precisamente el número 1 buscado!

Es normal, pues, que ni SER ni BAL vean ninguna relación entre las ganancias y su facilidad. Si BEN parece admitirla por un instante, es porque el orden de las cuestiones anteriores sugería una relación, pero se contradice a partir de la referencia a los pares e impares.

§/3 - *EL NIVEL IIA*.- Al inicio de las operaciones concretas, las generalizaciones inductivas ya facilitadas en el nivel IB, no ofrecen más novedades en cuanto a las combinaciones I-III. Los progresos se dan en cuanto a la generalización multiplicativa y a las relaciones en el conjunto de 36 que, sin embargo, no son enteramente dominados. En cambio, la "facilidad" variable de ganar, plantea todavía muchos problemas:

GAU (8;1) encuentra rápidamente, a partir de la II, que se gana *n-1* fichas: -"¿Y con la combinación III?". -"*Se me darían 8 fichas porque hay 9 casillas, ah no, hay 8: se*

ganarían 7 fichas". -"Y si 100 casillas?". -"*Se ganarían 99 fichas*". -"¿Y si juegas P.I. o N.R. con ésta (III)?". -"*Dos fichas*". -"¿Por qué?". -"*Voy a ver* (Exp.). *No, es igual que allí* (en la I)". -"Si juegas un número o si juegas par ¿dónde es más fácil ganar (en la I)?". -"*Par, no, por el número gano 3 fichas*". -"Pero ¿dónde es lo más fácil que la bolita se detenga?". -"*Es el número porque... no, impar porque hay 2*". -"¿Y lo más fácil para ganar cuando se juega par o impar?". -"*Es igual, porque hay una oportunidad de caer allá o allá* (2 ó 4)". -"¿E impar?". -"*Ah, no sé bien*". -"Entonces, ¿es más fácil jugar par o impar?". -"*No sé dónde*". -"Pero ¿qué crees?". -"*Es más o menos lo mismo... cuando la bolita se detiene en el 2 o en el 4...* (o) *en el 1 o en el 3... Es igual en los dos*". -"¿Y con la combinación (II)?". -"*Es igual: éste* (5) *con los impares y aquél* (6) *con los pares*". Se hizo todo como para llevar a GAU a la idea de la relación I = I, independientemente de los números absolutos. No obstante: "¿Es más fácil ganar por aquí (I) o allí (II)?". -"*Aquí* (I), *porque hay menos pares, ¡ah! no, aquí* (II), *porque hay más. Allí* (I) *no hay más que 2 en lugar de tener 3, hay más oportunidades aquí* (II)". -"¿Y para impar?". -"*Es igual: 3* (II) *y allí, 2* (I)". -Y sin embargo, las generalizaciones multiplicativas ya no causan problema: "¿Si pones 2 fichas a la vez sobre un *n* en I?". -"*Ganaré 6, porque es el doble*". -"¿Y 3?". -"*9 fichas*". -"¿Y 5 sobre par?". -"*Ganaré 5 fichas*". Regresamos a las facilidades: "¿Es más fácil ganar aquí (I) o allí (36: acaba de decir que se ganarían 35 fichas)?". "*Aquí* (I) *hay 4 números, entonces hay más oportunidades de ganar*". -"¿Cómo lo dirías?" -"*1 oportunidad sobre 4 de ganar*". "¿Cómo es eso?" -"*Tengo una* (buena) *oportunidad sobre 4 malas*". "Explícame bien". -"*los 4, porque cuando se juega* (uno de los) *4, ¡se puede jugar* (la bolita se puede detener en) *más o menos en* (este) *4!*" -"¿Pero el 4 es una buena o una mala?" -"*Ah, comprendo: hay que decir que hay 1 oportunidad sobre 3: una buena oportunidad sobre el número 4 y 3 malas*". -"¿Pero en total" -"*4 oportunidades*".

MAG (8;10) encuentra rápidamente la ley de las ganacias, así como el producto multiplicativo en la I: "¿Si se juegan 2 fichas". -"*Se ganarían 6 y allí* (P.I. - N.R.) *2 fichas*", etc. En cambio, sí es más fácil ganar sobre un número en la I que en la II, "*porque hay menos cifras*", la ganancia sobre los pares "*es la misma...* (no,) *se puede ganar mejor allí* (II) *porque hay más pares*". En cuanto a los negros, también se gana más fácilmente en la II que en la I, porque "*allí, allí y allí* (3 casillas negras) *se gana mejor* (que sobre 2 casillas en la I)". -"¿Se puede decir que el número de fichas que se gana tiene algo que ver con la oportunidad de ganar?". -"¡*No*!".

GEN (8;0) y HAD (8;2): las mismas reacciones. Sin embargo, HAD supone que se gana más en la II que en la I "*porque hay 2 números de más*", lo que sigue siendo la ley de la ganancia, pero agrega: "*es más difícil ganar que hace un rato*".

VAN (9;5) encuentra rápidamente, que por cada conjunto "*gano 1* (ficha) *de menos*". -"¿Y para 12?". -"*Ganaría 11 fichas*". -"¿Y para el resto?". -"*No cambia, porque para par - impar no puede cambiar*". -"¿Y para 100?". -"*99 fichas*". Esto no le impide un instante después, descubrir, que jugar par es más fácil con la III que con la I, "*porque allí* (III) *hay 4 pares y allí* (I), *nada más hay 2*". Y sobre todo, después de haber dicho que es más fácil que salga un número en la I que en la III, "*porque allí* (I) *las partes* (los sectores espaciales) *son más grandes y allí* (III) *es más pequeña porque hay más números*". concluye mediante una falsa analogía de que en la I es más fácil "tal vez" de alcanzar el nº 3 que un número par: "*tal vez, porque se detiene en una* (sola) *casilla: cuando la bolita se detiene en par, hay 2 y 2 impares, es más difícil*". -"Mira y explícame mejor". -"*Ah, para par la bolita se puede detener en 2 o en 4, mientras que para el 3 no hay otras*". -"¿Entonces, es más fácil?". -"*Es par, porque para par, si la*

bolita no se puede detener en el 2, todavía tiene la posibilidad (espontánea) *de detenerse en el 4*". -"Si se habla de posibilidades ¿cuántas hay si hay 4 números?". -"*Hay 3 posibilidades*". "¿Por la bolita que rueda?". -"*La bolita se puede detener en el 2: si es 1, 3 ó 4, está perdido*". La generalización multiplicativa se facilita para las combinaciones I-III, pero para 36 fichas: "¿Si se apostaran 2 fichas sobre el 26?". -"*Se ganarían 35 también* (como para 1), *no habrían suficientes fichas* (en la reserva)". -"¿Pero con una bolsa grande?". -"*Sería difícil de todos modos, sería un número mayor que 36*".

ARN (9;2) piensa todavía que es más fácil que la bolita se detenga en el nº 2 (entre los 4 de la I) que en un impar, luego, en el examen detallado: "*Es impar porque hay 2 cifras para ganar*". -"¿Y par o impar?". -"*Es igual, siempre 2 cifras*". "¿E impar en la II o en la III?". -"*Es igual, siempre 2 y 3 cifras, es igual... no, allí* (III más fácil) *porque hay 3 cifras*". -"¿Segura?". -"*Sí, sí*". -"¿Y jugando el 3 con la I y la II?". -"*Más fácil allí* (II) *no, es igual*". -Enséñame (los sectores)". (Lo hace). "*Es igual, no aquí* (I) *lado* (sector 3) *es más grande porque no hay más que 4 cifras*". -"¿Crees que el número de fichas que ganas tiene algo que ver con lo fácil o lo difícil?". -"*Sí, se da más* (en la III que en la I) *porque hay más casillas*". Multiplicación de *n* fichas: correcta, pero no hay generalización todavía, ni siquiera adicional a 36; "*Es diferente porque hay más cifras*".

BAG, a los 10;6 años dice todavía que "*la oportunidad de ganar*". una cifra entre los 4 de la combinación I es "*una probabilidad sobre 3 porque se apostó sobre una sola casilla*".

Los sujetos de este nivel IIA ya no encuentran dificultades en la generalización inductiva de la distribución de las ganancias para los pequeños conjuntos (I-III y P.I. - N.R.) y resuelven de inmediato las cuestiones de ganancias multiplicativas. En cambio, en cuanto al problema de las 36 fichas (que en el nivel IB SER ya parecía comprender en parte, salvo en lo que se refiere a los pares - impares, en este caso). VAN se pierde en cuanto a la multiplicación por 2 y ARN encuentra la situación "diferente" a causa del número de elementos. Eso demuestra que en este subestadío falta todavía una estructura general que permita interpretar las leyes extensivas.

Es lo que se vuelve evidente en las cuestiones de la "facilidad" variable de las ganancias y, por consiguiente, de las "posibilidades" de coincidencia o no coincidencia entre la bolita y los elementos elegidos. Notemos primero cierto progreso entre estos sujetos y los del nivel IB, que ya consideraban la ganancia de un número como más fácil en la combinación I que en la II o III "porque hay menos números". Este número inferior que entonces era prácticamente sinónimo de facilidad y mayor seguridad ("uno está más seguro", dijo un niño) cobra ahora un sentido espacial - aritmético, lo mismo, que precisan GAN, VAN y ARN: a menos elementos corresponden sectores "más grandes", por lo que hay más probabilidades de encuentros con la bolita. Pero, ¿no se tratará todavía únicamente

de objetos individuales o llegará el sujeto a justificaciones, procediendo por conjuntos con sus inclusiones y sus relaciones de equivalencia? El interés de los casos citados, es justamente su estatuto intermedio a este respecto, con toda la torpeza que conlleva esta situación.

Por una parte, todos estos sujetos, excepto GAN, que vacila un buen rato, admiten una igual facilidad de ganar si se apuesta a par, o si se prefiere, a impar, que si se juega P.U. o N.R. De la misma manera, casi todos reconocen de inmediato, que jugar par es más rentable que apostar a un número, porque éste es único, mientras que en la I hay dos pares. Sólo VAN comienza por el curioso razonamiento de nivel preoperatorio (citado al final del § 2), según el cual, "tal vez" sea más fácil acertar un número, precisamente porque es único (como si la bolita ¡no tuviera elección!), pero fuera de este caso, todos los demás sujetos se basan en la desigualdad de números, quedando éstos, entonces, absolutos. Pero, por otra parte, es precisamente este apego a los números absolutos, por lo tanto, cercanos a las observables, que marca los límites de este nivel, en oposición a la construcción de relaciones de equivalencias y de encajonamientos inclusivos. En efecto, puesto que se trata de decidir si es más fácil ganar apostando a par o a impar en la combinación I o en la II o III, la respuesta es casi unánime: en lugar de ver que la probabilidad es de 1 sobre 2, cualesquiera que sean los números en juego, el sujeto admite que mientras más elementos haya, más fácil se cae sobre par, contra impar o a la inversa. Y sin embargo, GAN comienza por decir, que en la II "es igual" que en la I al no pensar más que en la adjunción de los elementos 5 y 6, pero sin ver que entonces efectivamente la equivalencia nP = nI no se modifica. De la misma manera, VAN llega hasta decir "para par - impar no puede cambiar", luego se contradice al afirmar que en la III "hay 4 pares y allí (I) sólo hay 2", por lo que se considera que existe una probabilidad mayor. MAG hace el mismo razonamiento acerca de las 3 casillas negras en la II, opuestas a las dos en la I. Primero, ARN responde correctamente: "es igual", al precisar la equivalencia nP = nI para N = 3 como para 2, luego cede a la seducción de los números absolutos.

Ahora bien, esta incomprensión de los conjuntos de equivalencias por encajonamientos recurrentes, conservando la misma relación $(2 = 2) \rightleftarrows (3 = 3) \rightleftarrows (4 = 4)$, etc., va al par con otra reacción instructiva de este nivel: la dificultad de traducir en inclusiones las "probabilidades" o "posibilidades" que permanecen en situación de conjuntos disyuntivos sin coordinación en un sistema total. Es así como VAN, muy explícitamente afirma, que "hay 3 posibilidades" para 4 elementos, en las que "está perdido", mientras que el número ganado pertenece a

lo real. BAG también considera el número ganado en la I como "una probabilidad sobre 3", con esta precisión, "porque se jugó sobre una sola casilla", siendo ésta entonces, de otra naturaleza que las que no salen. GAN se expresa similarmente. Todo sucede como si el niño no distinguiera los dos estadios: el uno anterior, caracterizado por el conjunto todavía indiviso B, incluyendo *n* posibilidades, todas del mismo rango: el otro posterior, donde el subconjunto AI (singular o plural) es la de los eventos realizados y donde el subconjunto A'I sigue sin objeto actual. Ahora, para juzgar la facilidad de ganar, dicho de otra manera, su probabilidad en tanto que relación entre los casos favorables y los casos posibles, se trata precisamente de considerar las posibilidades previas B y de ver en los éxitos esperados cierto subconjunto Ax de B, que puede conducir con AI, pero también con una parte de $A'I$ y que está en la misma relación cuantitativa ($Ax<B$) con B que lo es A, cualquiera que haya sido la suerte de los sujetos en el juego. En cambio, estos sujetos se centran sobre lo real A y sólo llaman posible el conjunto de los eventos no realizados *no-A*, o sea, el conjunto complementario A'. Por lo tanto, no es por nada que a la cuestión de la relación entre la magnitud de las ganancias y la facilidad de ganar, estos sujetos o bien niegan toda relación (MAG), o bien ven una simple correlación entre el incremento de las ganacias y la extensión creciente de los conjuntos de fichas (HAD y ARN). HAD dice bien que en este caso será "más difícil" ganar, pero sin ver en ello una razón explicativa.

En conclusión, vemos a partir de estos hechos, qué tanto difieren las relaciones a constituir para dominar las cuestiones de facilidad y de posibilidad, de las relaciones observables en juego, en las generalizaciones inductivas: y es que por su misma naturaleza, lo posible rebasa el dato y exige una necesidad deductiva irreductible a las simples constataciones.

§/4 - *LOS NIVELES IIB Y III*.- Los sujetos del nivel IIB (de 10 a 11 años) resuelven, en parte, estos problemas. He aquí unos ejemplos, comenzando con dos casos intermedios:

FAN (10;6), después de haber indicado que un número cualquiera tiene más probabilidades de salir en la I que en la II o en la III, dice que para los números pares "*creo que es igual* (en la II y en la I), *porque aquí* (I) *hay 2 pares* (contra 2 impares) *y allí 3 pares* (contra 3 I)". Pero cambia de parecer: "*No, allí* (I) *hay 2 números pares, es más fácil: es el mismo principio que allí* (un número): *cuando hay menos, es más fácil*". En seguida, ella niega que una probabilidad sobre 2 equivalga a 2 sobre 4. "¿Y la combinación (II)?". (Ah!) "*Es igual, tengo tres probabilidades de perder y 3 de ganar*". -"¿Es igual?". -"*Sí... no, no es igual, para ganar vale más tomar aquél* (II): *hay 3 probabilidades de ganar... Pero es igual*".

JUS (10;2) comienza exactamente igual y también cree que la combinación I sea más favorable para los pares que la II, luego la II más que la I: "*Hay más, más probabilidades*". Pero después, él los iguala, porque se tiene "*una probabilidad* sobre dos de ganar". -"*Pero aquí* (II) *hay 6 números*". -"Sí, pero eso puede ser par o impar". No hace la derivación de la razón explicativa de los valores de las ganancias, pero a la pregunta, reconoce que "*cuando el número ganaba más fácilmente* (en I que en II o III) *se ganaban menos fichas*".

ALO (10;3), comparando la III con la I: "*pares e impares, creo que es lo mismo*. En fin, hay más probabilidades...", pero para N.R.: "*Allí* (I) *habían 2 rojos y 2 negros y aquí hay 4 y 4, vuelve a ser lo mismo, 2 de cada lado y 4 de cada lado, es lo mismo*". En cuanto a la relación ganancia por facilidad, "*no, no lo creo* (que haya)... *puede ser: si se juega una ficha* (en la III) *quedan 7 casillas malas, se ganan 7 porque quedan 7*". -"¿Y si una ficha en impar?". -"*Allí no es así*". Pero, luego, en 36: "*Está dividido en 2: 18 pares y 18 impares... es una probabilidad sobre las 2, está dividido en 2, hay 2 partes y no se tiene más que una*". -"¿Y en 36?". -"*Ah, sí, sí y aquí* (III) *también es igual*". Pero si ella admite que 4/8 = 8/16 "*sí, sí*", rehúsa que 2/8 = 1/4: "*no, no*".

VIA (10;7). Pares e impares en la I y en la III: "*Es igual porque existe la misma probabilidad de ganar*". Pero para N.R., vacilaciones: "*No, aquí* (III) *hay más números negros: 4 y allí* (I) *2, entonces se tiene una probabilidad sobre dos aquí y 1 sobre 4 allí... Ah, no, 1 sobre 2 también, es igual: es el mismo número* (N = R)". Ganancia por facilidad: "*Ganar 8* (= 7) *fichas es difícil sobre 8 números: hay 7 otros que pueden salir, eso tiene relación con 1 probabilidad sobre 8; cada vez hay más dificultad de ganar*".

COT (11;7) todavía cree que ganar par en la I es más fácil que en la II o III "*porque hay menos números: 2 P. y 2 I*". -"¿Y aquí (III)?". -"*Aquí también hay 4 y 4: ah, ¡es lo mismo!*". -"Cuando digo que tengo una probabilidad sobre 36 de ganar y luego recibo 35 fichas, ¿eso tiene algo que ver?". -"*Sí, 36 - 1 es igual a 35*". -"¿Pero por qué 36 -1?" "*Porque se tiene 1 probabilidad sobre 36 de ganar*". -"Se puede decir que sobre 36 probabilidades no se tiene más que 1 que sea buena?". - "*Sí*". -"¿Existen malas posibilidades?". "*35 malas, lo que se gana es el número de las malas probabilidades*". -"¿Y si hubieran 100 números?". -"*Se tendría una probabilidad sobre 100 de ganar y se ganarían 99 fichas porque hay 99 probabilidades no buenas*".

Y he aquí ejemplos del estadio III, donde la "razón" del valor de las ganancias está explícitamente destacada y donde el sujeto ya no experimenta dificultad alguna para razonar en términos de relaciones entre las posibilidades, o sea, de la "probabilidad":

LET (10;4). "Lo que quisiera que me expliques bien es, que lo que yo te doy cada vez, ¿qué tiene que ver con la probabilidad de ganar: con la combinación II cómo se puede explicar?". -"*Se gana 1 casilla menos de las que hay en el cuadro, aquí 5 en lugar de 6*". -"¿No se podría decir de otra manera?". ...lo que tú tienes en total contando la ficha que apostaste ¿cómo se podría decir?". -"*Al final se tienen tantas fichas como casillas*". -"Si yo juego 1 ficha al final, ¿cuántas veces tengo de más?". -"*Bueno, 5 veces más*". -"¿5 veces más?". -"*Sin contar la primera*". -"¿Y si se le cuenta?". -"*6 veces más*". -"En la ruleta lo que se juega se llama una apuesta; si juegas una ficha sobre el nº 22, en total ¿cuántas veces tienes la apuesta?". -"*6 veces la apuesta*". -"Y par - impar

¿cómo se dice?". -"*2 veces la apuesta*". -"Vamos a ver el verdadero juego (comb. IV), ¿cuántos números tienes". -"*36*". "Si juegas el nº 20 con 1 ficha ¿cuánto ganarás?". -"*36 veces la apuesta*". -"¿Cuánto tendrás en total?". -"*36 fichas*". "¿Cuántas te habré dado?". -"*35*". -"¿De cuánto es la probabilidad de ganar?". -"*Es muy pequeña... 1 probabilidad sobre 36*". "¿Qué quiere decir 1 probabilidad sobre 36 de ganar?". -"*Hay 36 casillas y es difícil ganar 1, caer sobre la buena. Se tienen 35 probabilidades de perder y 1 de ganar*".

GOL (10;7). "¿Por qué se tiene 1 probabilidad sobre 2 de ganar con impar aquí (comb. I)?". -"*Sobre las dos casillas hay... hay 2 casillas. Hay 2 posibilidades, no tengo más que 1 probabilidad de ganar*". -"¿Por qué 2 posibilidades, puesto que hay 4 números?". -"*Puede caer en par o impar, pero sólo tengo una posibilidad cuando juego*". -"Pero hay 4 números, entonces ¿por qué hay 1 probabilidad sobre 2?". -"*Hay 2 números impares sobre 4 números... si apuesto impar, tengo 2 probabilidades sobre 4*". -"¿2 probabilidades sobre 4 es lo mismo que 1 probabilidad sobre 2?". -"*Es lo mismo, creo*". -"¿Por qué allí (I) son 3 las fichas que se ganan, allí (III) 7 fichas y en P.I., N.R. una ficha?". -"*¿Se tiene una probabilidad sobre 4, por eso se ganan 3 fichas... si se juega el nº 4, cae en el nº 4, entonces se han evitado las otras 3 casillas, entonces se ganan 3 fichas*". -"¿Quisieras decir, que el número de fichas que yo te doy tiene algo que ver con la oportunidad de ganar en alguna forma?". -"*Sí*". -"¿Y aquí (comb. III)?". "*Si juego el nº 4, se evitan las otras 7 casillas y se reciben 7 fichas*". -"¿Sería justo decir entonces: el número de fichas que gano tiene algo que ver con la oportunidad de ganar?". "*Creo que sí*". -"¿Y para par - impar?". -"*En par - impar tengo 2 oportunidades de ganar y 2 oportunidades de perder... entonces, si se gana impar, se gana 1 punto*". -"¿Cómo es eso que se gana 1 ficha, siendo que hay 2 probabilidades de perder?". "*Porque 2 probabilidades de ganar y 2 probabilidades de perder, resulta ser lo mismo: se tiene tanta probabilidad de ganar como de perder*". -"Ahora, quisiera que me resumas bien todo, ¿por qué allí (I) se ganan 3 fichas, aquí (III) 7 fichas y aquí (IV) 35 fichas?". -"*Se ganan 3 fichas, porque se tiene 1 probabilidad sobre 4, aquí 7 fichas, porque se tiene 1 probabilidad sobre 8, P.I., N.R. 1 probabilidad sobre 2...*". -"Tú me dices: ¡aquí, allí y allí! ¿Cómo se podría decir de una manera general?". -"*Se ganan tantas fichas como probabilidades se tienen de perder*".

En el nivel IIB, los sujetos todavía no alcanzan, sino con dificultad, a igualar 2/4 = 3/6 = 4/8 en cuanto a las probabilidades en los pares e impares o negros y rojos. Y lo que es interesante es que llegan a esto mediante los conjuntos de equivalencias, mucho más, que por las relaciones numéricas, lo que es normal en un nivel en que las proporciones se captan con dificultad: FAN utiliza la igualdad de oportunidades para perder y para ganar; JOS, utiliza la de los pares e impares, ALO, "2 por cada lado" para N. y R., luego 18 pares y 18 impares para los 36, con este argumento: "hay dos partes (iguales) y no se tiene más que una"; VIA y COT, lo mismo: "Hay el mismo número." En otras palabras, estos sujetos comienzan a construir inclusiones, así como conjuntos de equivalencias encajonados y eso, notémoslo expresamente, no sobre las observables simples (ya que estos números fueron también correctamente constatados por los sujetos del nivel IIA, que no sacaron nada de ello), sino sobre los datos interpretados en tanto

que "posibilidades", es decir, éxitos posibles (expresado bajo la forma de eventuales coincidencias entre la bolita y el número apostado). Allí, se da, por lo tanto, un inicio de estructuración efectiva de las relaciones de posibilidades, que determinan la relación entre los casos favorables y los casos posibles, pero antes de la realización de algunos de estos últimos.

Por tanto, no es sorprendente el que los sujetos comiencen a dar una significación probabilista a la noción de la "facilidad" más o menos grande de ganar y llegan a percibir una correlación inversa entre el valor de la ganancia y esta facilidad (JOS, ALO y sobre todo, VIA).

En el estadio III, finalmente, se resuelven estas cuestiones de manera casi inmediata y bajo formas tan bien explicitadas como la de GOL: "Se ganan tantas fichas como se tienen probabilidades de perder".

§/5 - *CONCLUSIONES.*- La respuesta que los hechos dieron a la pregunta formulada en nuestra introducción, es sumamente simple y la diferencia entre las generalizaciones inductivas y constructivas se manifiesta igual de clara en este capítulo que en los anteriores. En realidad, se planteaban a los sujetos dos clases de problemas bien diferentes: ¿Cuál es la regla que fija las ganancias en el juego adoptado? y ¿cuál es la relación entre este regla y la facilidad de ganar? Ahora, si ambas clases de soluciones a encontrar suponen la coordinación y la generalización de las relaciones, se ha podido constatar, que éstas eran de naturaleza muy diferente. En el primer caso, se trata de constatar, después de prever, que en ciertas condiciones y de hecho, ciertas ganancias, eran obtenidas a título igualmente factual y sólo se trataba de establecer las relaciones entre estas dos clases de observables y de verificar su regularidad: de ahí las generalizaciones inductivas obtenidas no sin vacilaciones (cuyas descripciones redujimos, puesto que eso no era nuestro interés central), pero, alcanzadas en su principio, a partir del nivel IB y, a veces, con precisión ("siempre se quita una para dar las fichas", Ser, ¡a los 6;1!).

Al tratarse, en cambio, de encontrar la razón de esta regla y, para hacerlo, de ponerla en relación con la más o menos gran facilidad o dificultad de ganar, las soluciones sólo se vislumbran a partir del nivel IIB y no encontraban una formulación correcta sino hasta el estadio III, el de las operaciones proposicionales y formales. Ahora bien la explicación de este desajuste se muestra bien fácil: y es que simplemente las relaciones necesarias para resolver el segundo problema implican una composición de las posibilidades y que las

posibilidades ya no son las observables sino las entidades deductivas que se trata de construir. Es cierto que toda generalización constructiva consiste en insertar lo real en un sistema de transformaciones posibles y que lo propio de las "variaciones intrínsecas" que a menudo tratamos anteriormente, reside precisamente en constituir un conjunto de conexiones necesarias entre posibilidades todavía no realizadas. Pero la diferencia entre lo posible probabilista en tanto que, asimilando los casos favorables al "conjunto de los casos posibles", resulta ser en alguna medida supletoria en el sentido de que la realización de uno o varios de estos casos posibles, excluye la de los otros, mientras que en un modelo hipotético-deductivo cualquiera, las posibilidades así como sus relaciones, se agregan unas a las otras. Ahora bien, sin tener que precisar la noción discutida y discutible de equiposibilidad, es esta exclusión mutua de realizaciones (tanto favorables como desfavorables) la que constituye el problema específico de las posibilidades probabilistas, y uno se podría preguntar si los sujetos habrán llegado a la comprensión de las relaciones necesarias entre posibilidades supletorias de la misma manera (generalizaciones constructivas de relaciones entre términos no observables, formación de conjuntos de equivalencias y de sus encajonamientos inclusivos, etc.) y al mismo nivel que en el caso de los pasos acostumbrados de lo real constatado en las transformaciones posibles que lo engloban, pero sin incompatibilidades en las realizaciones. Pero la respuesta ha sido positiva y volvimos a encontrar en los presentes hechos la misma subordinación progresiva de las generalizaciones inductivas a las generalizaciones constructivas, y éstas últimas, hasta un nivel en el que el sujeto se vuelve capaz de establecer conexiones necesarias entre eventos que no se realizan. Ahí está el primer paso en dirección a lo que en matemáticas nos enseña la historia del cálculo de probabilidades: al mismo tiempo que sirve como auxiliar indispensable para las generalizaciones inductivas en los dominios experimentales, en que sus conclusiones sólo serán "probables", este cálculo en sí constituye una teoría, cuyas características de coherencia formal y de necesidad intrínseca, son las de todo sistema lógico-matemático, cualquiera que sea su contenido.

CAPITULO XI
GENERALIZACIONES RELATIVAS A LA PRESION Y A LA REACCIÓN

con A. Karmiloff-Smith y J.P. Bronckart

Al abordar los problemas de la generalización en los campos físicos, resulta útil partir de ciertas observaciones introductorias sobre el estado de la cuestión en el plano del pensamiento científico, porque este estado actual ha infligido los más importantes desaires a las ideas del sentido común que habían sido defendidas por el positivismo lógico en sus comienzos. Según estas ideas, el pensamiento físico debía limitarse a registrar los hechos y las relaciones observables y a generalizarlas a través de inducciones controladas, dado que el aparato lógico-matemático no es sino un lenguaje analítico (tautológico) que describe las circunstancias sintéticas, resultado de la experiencia. Sin insistir en la contradicción sorprendente que hubiera querido subordinar los contenidos múltiples y no tautológicos a formas que permanecerían, por el contrario, puramente analíticas (una de estas dos afirmaciones no puede ser sino falsa), la historia de las teorías recientes y el desarrollo de "modelos" han puesto en evidencia que los progresos de la física no se refieren únicamente a la acumulación de datos y de leyes, sino a un hecho tan importante como es la construcción sucesiva de ideas nuevas que, en cada etapa, permiten integrarlas en "estructuras" que superan las observables en dirección de la necesidad propia de las composiciones deductivas u operatorias. Las operaciones lógico-matemáticas constituyen, en este caso, un lenguaje, ya que permiten al sujeto concebir por analogía los objetos bajo la forma de "operadores", que es en lo que consiste la búsqueda de la causalidad.

Así pues, presentaremos la hipótesis desde su formación psicogenética en donde la generalización del carácter físico está lejos de reducirse a inducciones empíricas, aunque éstas sean necesarias para el establecimiento de leyes. Además, desde los estados iniciales se agrega una parte, al principio restringida, pero luego cada vez más amplia, de generalización constructiva, aunque ésta consista mucho más en elaborar formas nuevas con el fin de interpretar los contenidos provistos por la experiencia exterior, que en engendrar

contenidos nuevos como en las construcciones lógico-matemáticas que son fuente a la vez de las estructuras y de sus contenidos. No obstante, por un lado, los contenidos físicos, aunque observables en grados diversos, siempre están más o menos reestructurados por las formas, presentando ya a este respecto, una cierta novedad. Pero sobre todo, por el otro lado, se puede sostener que además están los contenidos dados en el pensamiento físico así construido, los cuales sobrepasan con mucho las fronteras de lo observable, ya que se caracterizan por las nociones de lo virtual y de lo potencial, parientes de las "posibilidades" en general, misma que ya se discutieron en el capítulo precedente. Es así que los problemas fundamentales del equilibrio, cuya solución otorga un enfoque complementario necesario para el estudio de la causalidad, están dominados únicamente por el recurso a los trabajos virtuales y a la energía potencial.

De aquí en adelante, partiremos de una cuestión que se había dejado abierta en nuestras investigaciones sobre la causalidad: ¿Por cuál generalización el niño, que en un principio sólo cree en la existencia de fuerzas en los estados motores, llega a aceptar que un peso inmóvil continúa ejerciendo un empuje sobre la mesa o el piso? Este análisis de la presión (ya propuesto anteriormente, pero desde el punto de vista de las relaciones entre el peso y la superficie, que por el momento ignoraremos) naturalmente ha conducido al de la reacción, igualmente iniciado a propósito de la causalidad, aunque en adelante nos centraremos en los modos de razonamiento conducentes a las nociones de una reciprocidad entre fuerzas opuestas y su equilibrio, con todo lo que este concepto implique por cuanto a componentes o contenidos virtuales.

El material se compone de agentes y reactivos diversos. Como agente, para el peso se han utilizado cilindros de cobre, pequeños trozos de madera, de poliestireno, de plástico, de esponja (cubos de 4 x 4 x 2 cm.). Para los reactivos, placas de esponja, de poliestireno, de plastilina, de madera y de fierro (todos de 12 x 12 x 2 cm).

Tomamos una placa de poliestireno en forma de puente para hacer observable lo que es inobservable, cuando la placa se coloca directamente sobre la mesa; algunas latas de madera con un espesor de 2 mm. colocadas sobre unos cubos con el fin de tener unidades de resistencia que se pueden adicionar. Además, se hacen presionar las manos de los sujetos las unas contra las otras y contra las de los experimentadores para ayudar a los sujetos a tomar conciencia de la relación de reciprocidad causal, en donde cada mano es simultáneamente causa y efecto.

Las interrogaciones son sueltas, el detalle de las preguntas y su orden dependen de las respuestas del sujeto. Por consiguiente, el esquema general es el siguiente:

a) *Descripción espontánea* del sujeto sobre el material; notar si hay seriación espontánea de la resistencia potencial de los materiales.

b) *Agente idéntico sobre diversos reactivos:* se comienza con la espuma puesto que es un fenómeno observable de presión, en donde el hundimiento es visible, lo mismo que el ascenso de la espuma cuando se levanta un peso:

-1 cilindro sobre espuma: anticipación (se provoca una falsa anticipación pues un cilindro no se hunde visiblemente en la espuma); constatación, explicación, sugestiones para hundir más, etc.
-2 cilindros sobre espuma: anticipación, constatación, explicación.
-2 cilindros sobre poliestireno, madera, fierro: anticipación, constatación, explicaciones, comparaciones, explicaciones.

c) *Problema de la conservación de las fuerzas:* ¿Por qué existen diferencias de hundimiento con el mismo agente...? ¿Por qué existen diferencias con el mismo reactivo, pero agentes diversos...? El peso es el mismo por todos lados, la presión es igual por todos lados, con el fin de ver si el peso y la acción del peso están disociados o ligados del sujeto. ¿Los reactivos sienten los diferentes pesos, con o sin presión? ¿Un mismo reactivo resiste de manera distinta según los agentes? En fin, ¿hay acaso compensación de las dos fuerzas? o ¿cuáles son las relaciones entre presión y resistencias?

§/1- *EL NIVEL IA*.- En el curso del estado preparatorio I, la presión se mantiene identificada con una observable que es el hundimiento del agente en el reactivo, pero si no existe relación general entre dos, como es el caso en el estadio II (donde el sujeto dirá que dos cilindros se hunden sobre la espuma porque son "más pesados" que ella): tal reactivo permite el hundimiento porque no "es duro", y en este caso, el agente se hunde porque "es pesado", mientras que si el reactivo es duro, el agente deja de actuar porque no hay nada que hacer. Pero sólo aquí hay una relación ocasional o de reencuentro, (como es el caso de un aficionado a las pendientes que puede hacer ascensos si está en las montañas pero que se mantiene inactivo si está en una región plana) y el sujeto se limita a invocar estas relaciones locales o parciales buscando una formulación general:

DAN (5;5): "¿Cómo es la espuma? -*Es suave.* -¿Y el cilindro? -*Va a hacer un hoyito así* (hunde el dedo): ¿Por qué? -*Porque es pesado, el redondo* -Mira. -*Eso no cae ni hace hoyo.* -¿Por qué? -*No es demasiado pesado.* -¿Y si yo pongo dos (exp.)? -*Veo un hoyo... porque es demasiado pesado.* -¿Y en eso (2 sobre el poliestireno)? -*Eso no hace* (no hará) *un hoyo, esa cosa blanca no se rompe... esto no hace hoyo porque no está duro* -(¿Sobre la madera?) -*No va a pasar nada, porque también es muy duro, y no se rompe.* -(¿Sobre el fierro?) -*Eso no se va a romper ni a hacer hoyo, porque también es duro y es la misma cosa que los fierros redondos* (=los cilindros: es la primera relación explícita entre el agente y el reactivo). -¿Los dos cilindros en tu mano son pesados? -*Sí.* -¿Sobre la esponja? -*Sí.* -¿Sobre el fierro? -*No, porque es también fierro* (cf. la relación precedente). -Pero el peso en los redondos, ¿queda dentro cuando están sobre el fierro? -*No.* ¿No tienen peso? -*No, porque también es fierro.* -¿Empujan sobre la esponja y el fierro? -*No* -¿Y sobre tu mano (exp.)? -*¿Sí, empujan sobre mí.* -¿Y sobre la esponja? -*Sí.* -¿Y sobre el fierro? -*No, sobre el fierro no empuja.* -¿La esponja siente algo pesado cuando se le colo-

can los dos redondos? ¿Y el fierro? -*Sobre el fierro no siente nada, pero la esponja sí siente alguna cosa.* -Y el plástico sobre la esponja, ¿empuja? -*No, porque es pequeño y no hace hoyo*". Se le pide apretar su dedo contra la esponja y luego levantarlo delicadamente: "*Esto hace más hoyos.* -¿Qué hace la esponja? -*Empuja* (hacia lo alto, una vez que levantó el dedo). -¿Empuja qué? -*Se hace ligera la esponja* (ella vuelve a quedarse como estaba antes de la presión del dedo)".

COR (5;11), las mismas anticipaciones y reacciones iniciales: la esponja "*es suave*" y el fierro "*es pesado*", etc. "¿Los dos cilindros empujan sobre la mano? -*Sí.* -¿Y sobre la esponja? *Sí.* -¿Y sobre el poliestireno? -*No, porque el corcho no es blando.* -¿Y sobre la madera empujan? -*No.* -¿Y sobre el fierro? *No.* -¿Por qué? (Silencio como ante todos los por qué)". COR se ha dado cuenta que la espuma "sube" cuando uno quita el peso y que su mano sube también después de que se ha quitado la presión: "¿Yo empujé tu mano? -*Sí.* -Y tú para no bajar, empujaste mi mano? -*No*".

Estas reacciones iniciales son muy claras. El sujeto no reacciona sino ante lo observable y lo generaliza inductivamente:[23] la presión se reduce entera e idénticamente a la acción de hundir, y esto último tiene lugar si el agente es "pesado", y el reactivo "suave" o "blando", mientras que si es "duro", el agente no hace nada, no presiona, no se "siente", ni siquiera conserva su peso. Según las declaraciones sucesivas del sujeto, existen dos condiciones *sine qua non* del hundimiento, pero el niño no menciona más que uno de los factores dejando a un lado el otro, cuando no se produce el hundimiento: el agente, que en sí es activo, se concibe como detentador de poderes que ejerce si las circunstancias se prestan a ello, pero no hace ni experimenta nada si no es el caso, de donde una suerte de dicotomía de niveles de acciones falta a la relación causal con el reactivo. Más precisamente, éste no tiene nada de reactivo todavía, y no es más que un "paciente" que "siente" el peso del agente cuando hay hundimientos, pero no siente nada si éstos no tienen lugar, ya que no "resiste" nada y sólo su "dureza" lo vuelve impropio a las empresas del agente. La única actividad del reactivo es la de retomar su forma una vez terminada la presión: la esponja "se hace ligera", dice DAN, después de haber eliminado los cilindros, pero no sucede nada durante el hundimiento, y COR niega haber rechazado, la mano del experimentador que presionaba sobre la suya para sugerir una idea de reacción. Por

[23] Pero esta generalización inductiva de las observables actuales implica como siempre ciertos marcos generales debidos a unas generalizaciones constructivas anteriores y que permiten, sobre todo, ponerlas en relación o en correspondencia. Por ejemplo, todos los sujetos citados de este nivel IA preveían un hundimiento del cilindro sobre la esponja: en tanto que "contenido", este hecho se debe naturalmente a la experiencia, por lo tanto a unas abstracciones empíricas; pero la generalización inductiva en juego en esta anticipación supone la puesta en correspondencia (morfismo) de los pesos pesados y los pedazos de esponja, y este puesto en relación comporta una "forma" (el morfismo como tal) adquirida anteriormente a niveles sensomotores.

otro lado, hay que hacer notar las interesantes respuestas de DAN a propósito del fierro sobre el fierro y que constituyen la primera relación del agente y del reactivo, pero de hecho una relación que viene a negar la posibilidad de una acción causal; el fierro sobre el fierro no produce nada, ya que él mismo es fierro y va a perder su peso debido a que está sobre fierro. En este caso, en que el reactivo no es un paciente cualquiera, suave o duro, es decir, accesible o no a las actividades del agente, sino es de la misma naturaleza que la de aquél, es necesario relacionarlos, y es lo que lógicamente hace DAN. Pero como son iguales, luego entonces de la misma fuerza, estrictamente no hacen nada, hasta no "sentir" que el uno está sobre el otro, y esto por el hecho que no tiene peso, "porque es también fierro". Puede ser que éste sea el más bello ejemplo de la ausencia inicial completa de la idea de reacción: en lugar de imaginar (aunque a título de inobservables) dos fuerzas iguales que se compensan, el sujeto las niega llana y totalmente, ya que no pasa nada. En una palabra, el equilibrio todavía no posee una igualación entre acciones opuestas: no es más que una equivalencia dentro de la supresión o el aniquilamiento de toda acción.

§/2-*EL NIVEL IB*.- El progreso principal, y muy interesante por la génesis de la idea de reacción que se adelanta ligeramente a los observables, es que los sujetos de este nivel IB admiten la permanencia del peso del agente, ahí donde no hay hundimiento e incluso suponen que es "sentido" por el reactivo, pero sin reconocer por lo tanto que haya presión: por consiguiente, si podemos decirlo, hay una presencia "experimentada" del peso, pero todavía no la de una presión "actuada". Luego entonces, sobre el último punto se agrega un segundo progreso: la presión cesa de referirse a una relación de todo o nada y comporta una gradación, en función de los grados de "dureza" del reactivo, los cuales se orientan en la dirección de una noción más o menos vaga de la resistencia:

LAU (5;6) piensa que el transmisor sobre la esponja "*va a pesar*", pero que no se hundirá "*porque ella retiene*". Ella constata que 2 se hunden "*porque es pesado*", pero sobre la madera "*no sucederá nada*", ni sobre el fierro "*porque es un fierro*", y más tarde ella dirá con respecto al fierro sobre fierro "*no se apoya es la misma cosa*" (los dos fierros). Sin embargo, después de haber constatado que el poliestireno sin ser pesado no produce hundimiento, LAU matiza sus afirmaciones y sus negaciones introduciendo grados: si el poliestireno no cede, es que los dos cilindros "*no se apoyan lo suficientemente fuerte*. -¿Pero un poco? -*Sí*. -¿Y sobre la madera? -*Un poquito*. -¿Y sobre la esponja? -*Mucho*. -¿Y sobre el poliestireno? -*Justo un poquito*. -¿Y sobre la madera? *Un poquitito*. -¿Y sobre el fierro? -*Un poquito*. -¿El mismo poquito? -*No*." Por cuanto a la reacción en el momento de la presión no se obtiene nada, a pesar de las sugerencias: "Si uno presiona sobre la esponja, ¿qué la hace volver a subir? -*La esponja*. -¿Ella hace alguna cosa? -*No, porque uno ha oprimido, y luego ha soltado. Si uno se que-*

da mucho tiempo, el hoyo se queda. -¿Dos cubos de madera empujan la espuma? -*No.* -¿Uno de fierro? -*Sí.* -¿Dos de fierro sobre el poliestireno? -*No.* -¿La espuma empuja tu dedo para subir? -*No, porque yo me quedo mucho tiempo, y si yo aflojo, ella sube*". Larga competencia: "¿Cuándo sueltas? -*Se vuelve a cerrar.* ¿Tú crees que jala tu dedo? -*No, nosotros somos los que debemos jalar*". Competencia corta y dura "¿Tú crees que jala el peso? -*No*". Presionamos todavía más sobre la competencia: "*Se queda así porque los dos son de fierro*" (cf. más arriba: "No se apoya" porque son los dos de fierro).

MIR (5;7) después del mismo comienzo piensa que los dos cilindros sobre el poliestireno no se hundirán "*porque es muy duro* (como la madera, etc.) *no es la esponja.* -¿El peso empuja sobre la esponja? -*Sí.* -¿Y también sobre el poliestireno? -*No.* -¿Es pesado sobre la esponja? -*Sí.* -¿Y lo mismo pesado que sobre el poliestireno? -*Sí*". -"Una punta de esponja sobre la esponja: "¿Siente algo la esponja? -*No, porque las dos son la misma cosa.* -¿Y sobre el poliestireno? -*No, porque no es demasiado pesado.* -¿Y los cilindros sobre la madera? -*Siempre porque es pesado.* -¿Y la madera sobre la madera? -*Sí.* -¿Pero son los dos de madera? -*Sí, pero es pesado, entonces siente*". Lo mismo sienten los cilindros: "¿Eso apoya? -*No.* -¿Para nada? -*Nada de nada, no.* -¿Pero la madera siente? -*Sí, ella toca*". Por cuanto a la reacción, MIR, no más que LAU, sospecha su existencia: la esponja se levanta "*porque usted ha quitado*" los cilindros, pero el reactivo "*no empuja.*"

YVA (6;6): un cilindro sobre la esponja "*eso no se apoya.* -¿Eso empuja? -No. -¿Y dos cilindros? -*Posiblemente eso va a empujar.* (Exp.) *Eso ya entró, eso empuja encima y eso entra*". Después de lo cual "*eso va a regresar.* -¿Qué lo hace regresar? -*La esponja.* -¿Cómo? -*Así*". Y sobre el poliestireno "*Eso allá* (cilindros) *no empuja... Son más pesados sobre la esponja.* -¿Y sobre la madera? -*La misma cosa que sobre el poliestireno* -¿Eso empuja sobre la madera? -*No.* -¿Se apoya sobre la mano? -*No, ah, sí un poco.* -¿Y sobre la madera? -*No*". Con el puente de poliestireno, él constata, con asombro, un pequeño hundimiento "*porque eso apoyó más.* -Y aquí (poliestireno sobre la mesa) si yo pongo los mismos pesos, se apoya? -*No.* -¿No se apoya, o no se ve? -*Sí, no se ve.* -¿Pero podemos pensar que se apoya un poco? -*Sí, porque eso se apoya sobre el* (lo otro) *poliestireno.* -¿Y sobre la madera se apoya? -*No.* -(Puente de madera fina) se apoyará? -*Sí, porque es más delgado*".

El carácter común de estas respuestas es el relacionar, aunque implícitamente (y todavía no como en el nivel IIA sobre una comparación de pesos), los agentes, cuyas actividades de presión varían en función de los reactivos, y los comportamientos de éstos, que pueden "conservar" (LAU) o dejarse hacer, pero que incluso oponiendo su dureza al peso del agente lo "sienten" cuando es pesado. Por consiguiente, aquí hay una especie de alargamiento de las observables a partir de la diferenciación de los puntos de vista, ya que un peso inmóvil sobre un reactivo que no se hunde el niño no lo puede observar, pero es observado por el reactivo que lo lleva ya que "es pesado, luego entonces se siente". Solamente cuando no pasa nada, el peso, siendo sentido, no ejerce ninguna presión: "toca", pero no se apoya, dice MIR, "eso no apoya", ni lo empuja, dice YVA. Por consiguiente, ya que esta presión se vuelve susceptible de variaciones, puede, sin embargo, aunque invisible, ejercerse "un poquito" (LAU) y aquí hay

un verdadero comienzo de adelantamiento de lo observable, lo mismo que cuando YVA, habiendo visto el poliestireno, en forma de puente, hundirse ligeramente, generaliza enseguida esta presión al poliestireno sobre la mesa.

Por lo contrario, todavía no hay ningún rasgo de una noción de reacción, ya que "retener" todavía no se concibe como una actividad dirigida, y la subida de la esponja después de quitar de encima el peso no tiene relación para el sujeto con lo que sucede durante la presión. Pero veamos todavía, en relación a este punto, dos casos intermedios entre los niveles IB y IIA:

ART (6;2) dice que el cilindro se hunde "*porque es más pesado que la esponja*" (lo que es una fórmula del nivel IIA) y que no sucede así sobre el poliestireno: "*Eso no se hunde porque el poliestireno es más pesado que eso* (siendo que el cilindro había sopesado los dos)". Entonces, pesado significa poseedor de un poder de resistencia como de presión. Lo mismo el hundimiento en la espuma no es considerable ya que ella "*es un poquito más pesada*", pero con más cilindros "*eso se volverá muy pesado*". Solamente estas actividades ligadas al peso no son todavía sino la expresión de las observables, ya que sin hundimientos los pesos no "empujan". "Pero el peso dentro de los transmisores ¿qué hace si no empuja al poliestireno? -*No hace nada*. -¿Dónde se queda? -*Ahí adentro* (dentro de los cilindros). -¿Y sobre la esponja? -¡*Desciende*! -Cuando se levanta la esponja "*ella vuelve a subir*. -Volviendo a subir, ¿Qué le hace ella al transmisor?... -Observa. -...-". Se realiza una presión con las manos: "Si yo empujo fuerte, ¿qué hace tu mano? -*Retiene*. -¿Pero qué haces tú? -*Yo empujo*. -¿Hacia dónde? -*Hacia arriba*. -Y la esponja con dos cilindros, ¿ella empuja también hacia arriba? -*No*. -¿por qué? -*Porque el transmisor es más pesado* (¡puesto que no podría tener dos empujes de sentidos contrarios!)". Nos dedicamos ahora a una sugestión masiva, que consiste en poner dos cilindros sobre la esponja y a levantar uno solo, de donde resulta una elevación observable del reactivo bajo el cilindro que permanece: "¿Podemos decir que la esponja empuja hacia lo alto? -(Vacilación) *Sí*". ART admite entonces que el poliestireno también puede empujar hacia arriba, e incluso lo ve, pero ella no comprende los productos de la sugestión, ya que con dos resortes ella reconoce que si no pudo estirar un resorte flexible más allá de un cierto punto es que "él retenía", pero ella contesta que sucedería lo mismo con un resorte rígido, que sería el caso *a fortiori*: "*No, no hace nada*", ¡puesto que no se ha movido!

DRA (7;11) tiene su propia teoría sobre la subida de la esponja. Con un solo cilindro "*la espuma tiene un fondo por encima y un fondo por debajo, entonces no desciende*", con dos cilindros, ella desciende, luego vuelve a subir después de su partida, contrariamente a la plastilina: "*La plastilina se hunde y no vuelve a subir. La esponja no se va hasta el fondo, entonces el fondo la hace subir. El poliestireno es más pesado que la esponja, entonces se hunde menos y el peso sobre el poliestireno pesa menos que sobre la esponja*. -El peso dentro de la esponja ¿es el mismo tipo de peso que dentro de los cilindros? -*Sí, pero hay más dentro de los cilindros*. -Tú decías que el de los cilindros se apoya sobre la esponja. ¿Qué hace el de la esponja? -*El peso de la esponja se aplana ya que hay más peso en los cilindros*. ¿La esponja no se apoya un poco sobre los cilindros? -*No, es demasiado ligera*. -Cuando los transmisores están sobre el metal, ¿el metal se apoya sobre los transmisores? -*No, el metal no hace nada. Cuando los pesos son iguales, ninguno pesa*. Ni uno ni otro empuja, ¿o los dos? -*Los dos no*

tienen necesidad de empujar". Empujón con las manos: "Yo empujo sobre tu mano, tú empujas en contra (notar la sugestión), no se mueve, ¿por qué? -*Porque empujamos la misma cosa, se tiene el mismo peso*. -¿Podríamos decir que la esponja empuja contra el cilindro? -*Sí, ella retiene el peso*. ¿Y con un peso más pesado? -*Ella debe empujar más*. -¿Podemos decir que retiene más? -*No, ella retiene menos porque se hunde más*. ¿Y el poliestireno contra el cilindro? -*Como la esponja* -¿Y la madera? -*Eso sí no, la madera y el cilindro tienen el mismo peso, entonces no se empujan*. ¿Para nada? -*No, jamás*". Se insiste al volver a hablar de las manos (donde él decía lo contrario), etc., pero DRA mantiene su rechazo categórico.

Estos dos bellos casos ponen en evidencia que la resistencia, aunque atribuida a un peso, no es todavía una fuerza de sentido opuesto a aquel de la presión, y del mismo modo, nos hace comprender por qué dos pesos iguales supuestamente no ejercen ninguna presión el uno contra el otro. Sobre el primer punto, ART, a pesar de que acaba de empujar de abajo hacia arriba la mano que empujaba la suya de arriba hacia abajo, se rehúsa a pensar que puede suceder lo mismo con la esponja y el cilindro, "porque él es mucho más pesado": dicho de otra manera, si una fuerza se coloca sobre otra, esta última será anulada en lugar de continuar ejerciéndose, o al menos de hacer el esfuerzo en sentido contrario, y eso es evidente si uno se remite a las observables. Lo mismo para DRA, el peso de la esponja "se aplana" en lugar de reaccionar, y si ella "retiene" y por consiguiente debería "empujar más" en caso de aumento de peso del agente, de hecho, ella "retiene menos" ya que está minorizada. De la misma manera, el poliestireno siendo "más pesado" que la esponja, y por ende más fuerte, retiene más que el agente; pero éste, en lugar de empujar más dado que tiene resistencia, "pesa menos sobre la esponja" como parece indicar lo observable. Por cuanto a la elevación de la esponja, no sucede ninguna reacción, sino un proceso interno, bellamente descrito por DRA, el cual sólo funciona después de la partida del agente, y si ART cede un instante a la sugestión contraria (subida observable después de que se ha quitado un cilindro de dos), ella no lo comprende y no lo aplica tampoco al resorte.

En una palabra, estos sujetos que formulan, en términos de pesos rivales, la relación del agente y de su reactivo, no comprenden todavía la posibilidad de dos acciones simultáneas de sentidos contrarios: si uno de los pesos lo lleva, el otro no hace nada, ya sea tratándose del agente que renuncia a ensayar o del reactivo paciente que experimenta sin reaccionar. Por consiguiente la situación de las dos manos que se empujan entre sí (y aquella del niño dirigida hacia lo alto) no provoca ningún problema, debiendo aclararlos, pero entonces se trata de conductas ordenadas y de movimientos voluntarios, ligado a intenciones excepcionales y bien delimitadas, lo que entonces apa-

rece como algo sin analogía con la relación de pesos de los dos objetos inertes superpuestos: y sobre todo, en el caso de las manos, los esfuerzos y las direcciones son observables, mientras que en las relaciones entre los sólidos superpuestos sin hundimiento, atenerse a las observables siempre conduce a la conclusión de que no sucede nada, sino una resistencia siempre pasiva del reactivo-paciente, y una inmovilidad correlativa del agente. Se comprende entonces esta idea notable, ya sostenida en IA por DAN y en IB por LAU, etc., que dos cuerpos de la misma naturaleza superpuestos (los dos de fierro, etc.) no se apoyan el uno sobre el otro, lo que DRA expresa en términos de peso: "Cuando los pesos son iguales, ninguno pesa". Desde el momento en que pesar significa apoyar, con resultado observable (hundimiento), efectivamente es claro que en caso de igualdad "no tendrán necesidad de empujar" ¡ya que esto no producirá nada! Por consiguiente, el problema no es el motivo de esta opinión tan extendida, puesto que es transparente, sino la duración de ésta que volveremos a encontrar en el caso de los sujetos del nivel IIA, cuando sobre una balanza de astiles, ellos comienzan a considerar las acciones simultáneas y opuestas de dos pesos iguales.

§/3-*EL NIVEL IIA*.- El carácter general de este sub-estadio del principio de las operaciones concretas es, desde la anticipación de los resultados, la puesta en relación espontánea de los pesos. Por otro lado, hay una conservación de pesos de un agente, cualquiera que sea el reactivo (salvo en caso de igualdad), pero sin que ello conlleve siempre a una presión ejercida sobre este último:

ROG (6;0): Un cilindro sobre la esponja: "*Eso hace* (hará) bing así porque es pesado y no la esponja. -(Exp.) ¿Por qué eso no se hunde? -*Porque la esponja retiene*. -¿Como? -*Con la esponja que tiene adentro*. ¿Qué es lo que ella hace? -*Se queda inmóvil, no se puede mover* (y por consiguiente no "hace" nada)". "*Así la esponja puede volverse a ir a donde estaba* (volver a subir). -¿Por qué? -*Porque dentro de la esponja hay algo que hace boing y que regresa*" e incluso llega a decir que contra los cilindros "*la esponja debe empujar*. -¿Hacia dónde? -*Todo adentro* (¡!)". El cilindro pesa también sobre el poliestireno pero "*no mucho*. -¿Y sobre la esponja? -*Un poquito, pero no igual*", pero sobre los sólidos no es una presión: "*Empuja... se queda como está... no, sobre este transistor no vemos*".

ERI (7;2): "*La esponja va a descender, porque es más pesado* (un cilindro) *que la esponja*". Pero "*no sobre el poliestireno, es un poquito duro*. -¿Es el mismo peso, o no? -*Sí, porque el peso es igual de pesado sobre el poliestireno que sobre la esponja, es lo mismo aquí y allá*. -¿El poliestireno siente la misma cosa? -*Sí*". En un momento dado llega incluso a decir: "*Casi todo el material que hay aquí lo veo*(¡!) *descender un poquito*" en el momento de las presiones, creando así una especie de falsos observables, para mantenerse coherente dentro de sus generalizaciones nacientes. Después de las preguntas sobre las manos, donde él dice: "*Debo empujar hacia*

arriba", ERI dice a propósito del peso sobre el poliestireno que éste también debe "*empujar hacia arriba*" para resistir, pero "*la esponja no empuja; es el transistor el que empuja: desciende.* -Y tu mano, cuando el transmisor empuja, ¿no debe empujar también? -*No, eso no desciende: porque yo agarro bien el transmisor que no toca.* -Pero (entonces) ¿tu mano debe empujar? -*Sí.* -¿Y la esponja? -*No, no como la mano, porque la mano se puede mover, pero la esponja no*". Y sin embargo, "*ella vuelve a subir, pero porque ya no hay nada sobre la esponja*".

MER (8;8): la esponja se hundirá a causa de la diferencia de pesos, pero no el poliestireno porque "*hay algo que lo retiene encima*", aunque el peso de los cilindros "*eso no cambia, se queda siendo lo mismo*" sobre los dos reactivos, etc. Sin embargo, ellos no se apoyan de la misma manera "*porque la madera es dura, el poliestireno no tan duro, y la esponja todavía -... -menos.* -¿Qué hace la madera para no hundirse?-... -¿Si yo empujo sobre tu mano con el peso? -*Yo sostengo, evito descender.* -¿Empujas? -*No ... sí.* -¿Hacia abajo? -*No, hacia arriba.* -¿Podemos decir lo mismo de la madera, que empuja, etc.? -*No, porque la madera es más dura que mi mano*". La madera no sentirá nada, salvo una pequeña bestia dentro "*sentirá que se aplasta* (extensión de los puntos de vista)". Por cuanto a la esponja sobre la esponja, "*cuando son las dos del mismo peso, no se apoyan: la esponja de abajo no siente nada*".

MAU (8;9): el poliestireno no siente otro poliestireno del mismo peso: "¿Qué se necesita para que se sienta? -*Algo más pesado que el poliestireno.* -¿Y el mismo peso? -*Eso no importa.* -¿Y menos pesado? -*Menos que... menos que nada* (se ríe) *¡me agarraste!*".

Lo propio de estas respuestas es el contraste entre el principio de lógica que conduce a la explicación del hundimiento por la relación de pesos con la conservación general de estos últimos, y la dificultad de aplicar los mismos razonamientos a todo lo que sobrepasa las observables (salvo imaginar momentáneamente, como ERI y los otros, falsas observables para preservar la coherencia). El sujeto admite perfectamente en principio que si el peso se conserva, debe apoyarse con la misma fuerza sobre todos los reactivos, pero no lo hace de la misma manera según su dureza, y un peso sobre la madera no lo siente (por ejemplo MER, que extiende el punto de vista sobre lo que siente un animalito en su propia mano). Particularmente es curioso ver con qué insistencia estos sujetos admiten que el fierro sobre el fierro, o la esponja sobre la esponja, etc., "no empujan" porque "los dos tienen el mismo peso", mientras que con una balanza hay un principio de comprensión del equilibrio entre fuerzas contrarias: pero es precisamente sobre la balanza (sin olvidar la experiencia adquirida con los columpios) los movimientos astil muestran que si un peso desciende de un lado hay que hacer subir el del lado opuesto, de tal forma que el equilibrio aparezca precisamente como la forma límite de dos movimientos inversos. En caso de simple superposición en el contrario, no hay más movimiento y, teniendo en cuenta sólo las observables, como es el caso en este nivel y en el de algunos esporádicos adelantamientos, es

lógico concluir que no sucede nada (excepto si descubrimos con MAN que la paradoja aparece entonces, "con menos de nada"). En los casos más favorables donde la reacción parece anunciarse bajo la forma de un poder de "retención" (ROG, MER, etc.) es de señalarse una dificultad de la misma naturaleza, que concibe esta retención como dirigida en sentido contrario de la acción: efectivamente hay en la esponja una tendencia "a regresar a donde estaba", concede ROG, lo que lo hace entrever la posibilidad de un "empuje" contra el cilindro metálico, pero este empuje permanece "dentro" por lo que no se ejerce en realidad contra "este peso exterior"[24]. Todo el nivel IIB nos va a mostrar la complejidad de este problema.

§/4-*EL NIVEL IIB*.- Entre el nivel IIA que propone una explicación de los hundimientos en relación a los pesos, con una tendencia a conservar estos últimos, pero con un rechazo a admitir los "empujes" que sobrepasan a las observables y sobre todo a las reacciones, y el estadio III, donde las acciones y reacciones son finalmente comprendidas, se extiende un subestadio intermedio IIB (9-10 años en promedio) caracterizado por dos nociones correlativas (pero donde los sujetos se subrayan con frecuencia uno más que el otro): una extensión progresiva de acciones de presión o empuje en los casos donde no hay

---

[24] Si los casos de este nivel IIA son fáciles de interpretar, hay uno, por el contrario, donde no sabemos qué hacer ya que sólo el porvenir demostrará si se trata de un joven genio o de un pequeño astuto cuya inteligencia consiste, entre otras cosas, en saber utilizar todas las sugestiones. Hagamos notar desde un principio que DRE (6;6) mantiene un nivel bajo en lo que concierne a presiones: contesta que el cubo de plástico empuja, aunque sea un poquito, sobre la esponja, no más que sobre la mano. Por consiguiente hay "*un poquito de peso*"; pero este peso no empuja: "*lo tiene todavía*", por consiguiente no hace nada. La esponja "*se deja*" hundir, y el poliestireno "*no se deja*". "*La madera se mantiene, quiere mantenerse, no quiere que la hagamos bajar*". Y si se sostiene es porque "*se ha puesto fierro*" en su interior. La resistencia del poliestireno es todavía más interesante "*porque hay muchos hoyitos* (sugeridos por su textura) *y cada uno se hace como una escalera*", de donde el poliestireno resiste gracias a su estructura estratificada. Cuando se hace la experiencia de las manos, él responde: "*Tú haces tu fuerza, y yo también hago la mía, de aquí que no lo logremos ninguno de los dos.* -¿A dónde va mi fuerza? -*Hacia abajo* -¿Y la tuya? -*Hacia arriba*". Entonces, regresando al poliestireno, es donde DRE da respuesta de apariencia superior: "¿Los cilindros tienen una fuerza? *No*, (sí) *toman su fuerza para empujar hacia abajo y el otro toma la misma fuerza para ir hacia arriba*". Pero con la presión de la madera el cuadro se falsea: "¿Hay una fuerza que va hacia abajo (sobre el poliestireno? -*No la madera tiene el mismo peso*, (pero) *no deja salir su fuerza*". Sobre este caso nuestras opiniones están divididas: unos interpretan las respuestas como precoces de tipo superior. El autor de estas líneas piensa, en cambio, que contrariamente a los ejemplos citados en el nivel IIA, donde los sujetos conservan sus ideas a pesar de la experiencia de sus manos, DRE ha sabido utilizar de entrada la sugestión.

un hundimiento observable, y una fuerza de resistencia acordada a los reactivos, la cual, sin ser todavía una "reacción" proporcional a la acción, constituye nada menos que un freno susceptible de bloquear las presiones, según sus modos diversos vayan de "retener" a "expulsar", pero comenzando igualmente a sobrepasar los límites de lo observable:

MAG (8;10) es intermedio, debido a sus contradicciones entre los niveles IIA y IIB. El peso no cambia pasando de la esponja al poliestireno, y los cilindros se apoyan parecidamente, a pesar de que el poliestireno no se hunde. "*¿Porque es pesado?*". Por el contrario, no pesa sobre la madera que "*es todavía más dura*" pero "*se apoya encima*", de manera similar que sobre el poliestireno, y menos que sobre la esponja (cf. "apoyarse sobre" y "apoyarse contra"). Inmediatamente después ya no pesa sobre el poliestireno "*porque no se hunde*" luego vuelve otra vez a pesar, mientras que no lo hace sobre la madera: "¿A dónde se va el peso, entonces? -*Se queda ahí mismo.* -¿Y sobre el poliestireno? -*Va dentro* -¿Y por qué no se hunde? -*Porque es duro* -¿Y por qué los transmisores no van hasta el fondo de la esponja? -*Porque la esponja vuelve a subir* -¿Qué hace? -*Porque es un poco dura, empuja hacia arriba*". Pero posteriormente: "*El poliestireno retiene.* ¿Qué quieres decir?-... Y si yo empujo tu mano ¿qué debe hacer ella? -*Retener.* -¿Y la esponja empuja hacia arriba para retener? -*Sí, un poquito.* -¿Y la madera no? -*Porque la madera es más pesada*". Finalmente, madera sobre madera: la que está abajo no siente nada "*porque es el mismo peso, pero el peso de encima es más pesado.* -¿Y hacia dónde va el peso? -*Se queda en el mismo lugar*".

NIC (9;5) presenta las mismas contradicciones continuas entre la sumisión a las observables y las tentativas de superarlas; "*Sobre la esponja, ellos* (los cilindros) *empujan más fuerte. Sobre el poliestireno se apoyan menos, porque eso se hunde menos.* -¿Eso empuja con su peso? -*No.* -¿Dónde va el peso? -*Sobre el poliestireno.* -Entonces, ¿el peso empuja al poliestireno? -*Sí, pero sólo un poco* -¿Y sobre la madera? -*No... sí.* -¿Y empuja lo mismo sobre la madera que sobre la esponja? -*Sobre la esponja empuja más.* -¿Y allá (fierro)? -*Se apoya* -¿Los cilindros empujan más sobre la esponja que sobre el fierro? -*No, se apoya más sobre la esponja, ya que ella se hunde.* -¿pero empujan igual? -*Es diferente, porque aquí se hunde y sobre el fierro es duro.* -¿Se apoya menos sobre el fierro? -*Apoya más... o menos.* ¿Y el cubo de madera? -*El cuadrado se apoya más sobre la esponja que sobre el fierro.* -¿Pero eso no se hunde? -*Es ligero* (el cubo) *por eso no se puede hundir*".

REM (9;1); el peso de los cilindros "*es siempre el mismo peso*" sobre la esponja y sobre el poliestireno. "¿Y se apoya lo mismo? -*Sí, porque siempre es el mismo peso.* -¿Y sobre la madera? -(larga vacilación) *Sí, porque siempre es el mismo peso*". Pero esta bella lógica ya no es válida para el poliestireno, que no se apoya sobre la esponja, después "*un poquitito*", pero no sobre la madera. Lo mismo el cubo en madera "*empuja*" sobre la esponja y el poliestireno, pero no sobre el fierro ni sobre otra madera "*porque madera sobre madera es el mismo peso*". En relación a la reacción, REM acepta que su mano "*debe empujar hacia lo alto*" para resistir a la del adulto, de donde resulta otro nuevo éxito momentáneo de la lógica: el poliestireno "*debe empujar hacia arriba*" para que los cilindros no se hundan, pero el fierro "*debe empujar: debe hacer un pequeño esfuerzo*".

CED (9;6) piensa que el peso de los cilindros se conserva: "*Eso se apoya siempre igual*" sobre la esponja, el poliestireno y la madera, salvo que en caso de hundimiento

"*se hunde hasta una cierta distancia, pero después del transistor ya no es demasiado pesado*". Lo que retiene, en el caso de la esponja, es su base inferior, y en el caso del poliestireno su estructura casi corpuscular demasiado densa: "*Hay unas pequeñas bolitas muy apretadas*". En el caso de las dos manos "*yo retengo*", y "*yo debo volver a subir*", pero a pesar de una sugerencia verbal refiriendo al resorte rígido y luego a la esponja, le rehúsa a éste el poder de empujar hacia arriba: "*Pero no, porque ella está debajo, y se queda como está*".

ANA (9;11) constata que un cilindro no es suficiente para hundir la esponja: ella "*es resistente, ella se mantiene*". El poliestireno todavía más. "¿Se puede decir que la esponja siente el peso encima? -*Sí*. -¿Y el poliestireno? -*Mucho menos, pero sin embargo un poco*. -¿Y la madera? -*Ahí sí, nada*". Regresamos a la "resistencia" de la esponja: "¿Me puedes explicar qué es "resistir"? -*¡Ah, es bastante difícil*".Después de la experiencia de las manos: "¿podemos decir que la esponja da también sus fuerzas contra el peso? -*Sí... no, no hace subir a la esponja, la aplana*. -¿Y cuando quitamos el peso? -*Vuelve a subir*. -¿Entonces, ella da su fuerza? -*No, solamente cuando usted quita los transistores, no cuando están encima*. -Pero ¿para que la esponja los sostenga como tu mano? -*Sí, podemos decir que ella empuja un poquito* (no muy convencida). -¿Y con un transistor (metal) encima? -*Sí, pero eso* (ella) *empuja un poco menos* (¡!)". En relación al poliestireno: "*No, él no empuja* (pero resiste) *porque es demasiado espeso y duro, no tiene necesidad de empujar*". Regresamos a la experiencia con las manos y preguntamos esta vez si el peso (cilindro, poliestireno, o madera) "también pasan" en caso de no hundimientos: "*Sí, un poquitito, pero casi no se nota* -¿Siempre lo mismo sobre todos? -*Sí, siempre es el mismo peso, es simplemente que lo que está debajo es más duro, más pesado*. -¿Y lo que está debajo empuja lo mismo para todos lados? -*No, rechaza* (¡!) *diferentemente, porque aquí* (el reactivo) *es mucho más duro, pesa, pero no lo vemos nosotros*".

FRE (10;5) el peso se conserva: "*Por supuesto, un kilo va a cambiar si lo ponemos a un lado, entonces, apoya lo mismo*. -¿Cuál de estas materias debe resistir más cuando colocamos cilindros encima? -*El fierro, porque la esponja es muy blanda y el fierro muy duro*. -¿El plástico sobre la esponja se apoya? -*No,... sí, pero no se siente*. -¿Y plástico sobre fierro? -*Sí, como antes*. -¿La esponja debe resistir más al plástico o al cubo de madera? -*El cubo es más pesado entonces apoya más de esta forma la esponja debe resistir más al plástico*". Es claro que hay una confusión entre "más" y "mejor" resistir, pero es instructiva y parece demostrar que "resistir" no es más que una semi-actividad, que no se evalúa sino a través de sus resultados y no todavía por su dirección (cf. ANA con el transistor sobre la esponja).

PAC (11;11) nos proporciona un nuevo ejemplo: "¿Pero qué hace la esponja para no hundirse? -(Larga vacilación) *Trata de resistir con su anchura* (espesor) *y su longitud*. -¿Pero cómo? -*No sé exactamente; posiblemente teniendo el mismo peso que el cilindro*". El peso se conserva, lo mismo que las acciones de empujar o apoyar, pero las resistencias cambian. La esponja sube un poco si quitamos un cilindro de dos "*porque así estará más ligero*". "¿Se puede decir que la esponja resiste empujando hacia arriba? -*¡Ah, eso no! La esponja no empuja hacia arriba*". Por otro lado, "*no tiene necesidad*" de resistir al cubo de plástico "*porque ella es demasiado fuerte para combatir al cubo*. -¿Y para resistir? -*Eso quiere decir que no se hunde*. -¿Y el poliestireno no debe combatir contra el peso del plástico? -*Eso sí no, no tiene necesidad: él es demasiado duro*".

Teníamos la intención de multiplicar estos ejemplos en la medida en que son muy ilustrativos del punto de vista de la liberación de las

observables desde el principio de la construcción de esta noción enteramente inobservable, que resulta ser una reacción igual a la acción y orientada en sentido contrario. Así, lógicamente los dos conceptos de un empuje invisible y de una reacción también poco perceptible van paralelamente, ya que, si una presión no da lugar a ningún efecto comprobable, es necesario que ella sea contrarrestada por una fuerza opuesta. Como la presión sigue al movimiento del agente que apoya contra el reactivo, mientras que éste permanece inmóvil, la acción del agente actúa como operación directa o positiva, y la reacción como operación inversa o recíproca, de donde surge una mayor facilidad de extensión de la primera en los casos observables, ya que ella comienza desde el nivel IIA. Por consiguiente, estaremos tentados a distinguir un nivel IIB donde se afirma cada vez más esta extensión, y un nivel IIC donde la resistencia es el centro de los problemas. Sin embargo, este desfase no tiene nada de absoluto; desde MAG (8;10) y REM (9;1) se encuentra la expresión "empujar hacia arriba" para calificar la resistencia, y a los 12 años todavía encontramos sujetos que sostienen que el cilindro "apoya sobre el fierro", pero desde el punto de vista del fierro podemos decir que casi "no apoya", y que un cilindro no apoya 'verdaderamente" sobre otro "porque tienen el mismo peso".

Dicho esto, el problema central del nivel IIB, a pesar de los desarrollos visibles de los 9 a los 11 años, y del desarrollo de la naturaleza de los comportamientos del reactivo, designados con los términos de "retener", "resistir", o incluso "rechazar", queda resumido con la explicación de quien contesta con tanta razón "¡Pero si es muy difícil!". Comenzando con los casos intermedios de MAG y NIC, sus contradicciones muestran perfectamente la solidaridad que hay entre las dos cuestiones de la generalización de la acción de "apoyar" y de la génesis de la idea de "rechazar". Para MAG, el peso apoya todavía sobre el poliestireno, pero ya no sobre la madera "porque todavía es más dura": entonces si la esponja empuja hacia arriba "porque es un poco dura" (pero atención: ella no empuja "más que un poquitito" para retener), la madera no hace nada "porque es más pesada". En el caso de NIC, las contradicciones son todavía más evidentes porque son inmediatas: el fierro siendo "duro", el peso apoya más sobre él "...o menos", y poco después vuelve a suponer sucesivamente que sobre el fierro "eso apoya más" que sobre la esponja y exactamente lo contrario, lo que nos lleva a decir que si la retención o la resistencia son funciones de la dureza, no se puede saber si ellas corresponden a una presión más fuerte o más débil del agente.

Aquí es precisamente donde radica el nudo del problema, y si

REM opta por una correlación en caso de efectos débiles (el poliestireno no se apoya "más que un poquitito" sobre la esponja y nada sobre la madera, el peso de ésta no exige de regreso más que "un pequeño esfuerzo" para rechazar el del fierro), nosotros vemos efectivamente que ANA, y sobre todo FRE, hacen de la resistencia un producto estático de la dureza y no un esfuerzo dirigido en sentido inverso a la presión: ANA acepta sin convicción que la esponja "empuja un poquitito" contra el peso que presiona sobre ella, pero ella "empuja un poco menos" y no más si uno aumenta este peso; y FRE llega hasta una disociación completa a propósito de su mano, que hace más esfuerzo para sostener un madero que un plástico, pero "resiste más al plástico", ya que es más ligero. De la misma manera PAC estima la noción de resistencia como una redundancia si se trata de otra cosa que no sea la retención debida a la dureza interna del reactivo: la esponja "no empuja hacia arriba" y "ella no tiene necesidad" de resistir al plástico ya que ella es "demasiado fuerte" para impedir el hundimiento (lo que por otra parte también decía ANA).

En una palabra, retener, resistir, rechazar, no consisten todavía en una reacción en el sentido de una actividad dirigida en sentido contrario de la acción exterior: es una semiactividad con efectos contrarios, lo que nos hace volver a lo mismo, ya que ella no se despliega hacia afuera del reactivo ni se aboca a preservar su integridad bloqueando las intromisiones que la amenazan. Ella sólo se juzga entonces, más que por sus resultados observables, y éstos son además más naturales de lo que los sujetos tienen tendencia a creer, que por el efecto nulo del peso que deja de actuar: "se queda en su lugar" dice así MAG y "se apoya encima" en lugar de presionar en contra.

§/5 - EL ESTADIO III. -Finalmente es hacia los 11-12 años que la presión, generalizada a todos los agentes de todos los pesos, ocasiona en los reactivos un empuje de dirección opuesta. Pero todavía esta compresión se efectúa en dos tiempos y no se completa sino hasta el estadio IIB. En el nivel IIA hay solamente transposición de la situación IIB donde la resistencia del reactivo es más fuerte cuando el agente es menos pesado, de donde, para los sujetos IIA, hay una ausencia en reacción dinámica cuando este reactivo es más pesado y su resistencia pasiva es suficiente. Vayamos a los ejemplos:

NIC (11;7): con dos cilindros "*la esponja retiene, impide ir hasta la mesa.* -¿Y con un solo cilindro, también retiene? -*Sí, pero es menos pesado.* -¿El fierro debe retener? -*No, porque es duro.* -¿Y el poliestireno? -*No.* -¿Los cilindros apoyan también sobre el fierro? -*Sí.* -¿Y uno solo (sin hundimiento) empuja sobre la esponja? -*Sí.* ¿Ella qué tiene que hacer entonces? -*Enpujar contra él.* -El empuja ¿en qué dirección? -*Hacia*

abajo. -¿Y la esponja? -*Hacia arriba* -¿Un transmisor de madera empuja sobre la esponja? -*Un poco.* -¿Y la esponja debe empujar contra él? -*Sí.* -¿El poliestireno debe empujar contra el cilindro? -*Sí debe empujar, porque es más ligero que el cilindro.* -¿Y la madera empuja contra el peso? -*Como no se puede hundir, no tiene necesidad de empujar*". Pero inmediatamente después piensa que el fierro sobre el cual se coloca un transmisor "*de cualquier manera empuja.* -¿Y si empujara más fuerte que el transmisor? -*Volvería a subir*". Pero "*la esponja debe hacer más esfuerzo* (que el fierro). ¿Te apoyas encima de tu silla? -*Sí.* -¿Y ella apoya contra ti? -*Sí.* -¿Lo mismo? -*Sí, ella puede retener*".

GAB (11;8) expresa la reacción en términos de resistencia: "*El poliestireno es más resistente a la espesura* (que la esponja). *Sostiene el peso.* -¿Y la madera? -*También retiene el peso.* -¿Y un fierro de un kilo sobre la madera, comparado a madera sobre madera? -*Debe resistir más para el fierro, pero no se percibe directamente*".

AVE (12;0) explica la reacción del poliestireno por su naturaleza corpuscular de "*bolas pequeñas apretadas muy fuerte*" de donde resulta no solamente su dureza sino su resistencia concebida explícitamente como un dinamismo: "*las pequeñas bolitas puede ser que sean como un resorte: cuando uno empuja encima, eso vuelve a subir*".

STE (12;7); la esponja reacciona "*volviendo a subir*": "*ella rechazó el transmisor.* -¿Y la madera? -*No, no tiene necesidad de rechazar porque es dura*". Por cuanto al peso sobre el poliestireno, éste "*trata de retener porque tiene un poquito más de fuerza que la esponja*". Por el contrario, la madera no reacciona: "*Es demasiado sólida para soportar los transistores, los retiene en su superficie... porque su superficie es dura*".

PHI (12;7): "*Los pesos tratan de hundirse en la esponja*", pero ésta "*es como una persona: debe contraerse.* -¿Y el poliestireno? -*Debe hacer un poco más de esfuerzo, porque tiene la resistencia* (además de esta reacción)" pero "*es un esfuerzo mucho mayor* (que aquel de la madera soportando un peso) *porque la madera es más resistente*".

Y finalmente, presentamos ahora un caso del nivel IIB:

TOI (11;2) "¿El peso es tan pesado sobre la esponja que sobre el poliestireno? -*Por supuesto que no va a cambiar porque está ahí encima.* -¿Y empuja igual? -*No, porque es más duro... sí, es lo mismo.* -Cuando tú empujas el poliestireno, ¿pasa algo sobre tu dedo? -*Es mi dedo el que es apoyado, soy yo quien apoyo...*(y) *como yo apoyo es evidente que mi dedo sea apoyado.*[25] *La esponja lo hace volver a subir* (un metal ligero) *hacia arriba.* -¿Y tú crees que la madera también lo hace subir aunque no lo veamos? -*Pienso.* -O ¿es diferente lo que pasa entre la esponja y la madera? -*No, pienso que es lo mismo.* -¿Y el poliestireno? -*Seguramente sucede lo mismo, cada una* (según) *es una fuerza diferente*". Por cuanto a esta fuerza, "¿es que la esponja reacciona diferente con este plástico (cubo pequeño) y con esta madera? -*No sé. Seguramente debe reaccionar de manera diferente, porque la madera debe ser más pesada. Por lo tanto yo no veo nada, francamente, por consiguiente pienso* (= deduzco) *que ella debe empujar más con la madera que con eso...* -¿Y así (madera o plástico sobre una placa de fierro), el fierro debe empujar diferente? -*Sí, es como sobre la esponja.* -¿Y tú empujas sobre tu silla? -*Sí, cuando me siento debo empujar bien encima.* -¿Y la silla empuja hacia arriba? -(ella ríe) *Sí.* ¿Y si ella no empujara? -*Me estrellaría contra el suelo.* -¿Y porqué no te

---

[25] Eso sin haber pasado la experiencia de las manos.

caes ni te disparas? -*Porque empuja lo suficiente. Debe empujar tanto como yo empujo.* -¿Y si yo me siento, cambia de empuje? -*Sí*". Dicho de otra manera, hay igualdad entre la acción y la reacción, cosa que TOI afirma igualmente para la esponja sobre la cual se coloca un pedazo de plástico demasiado ligero con el fin de que suceda algo observable: "*Ella empuja justo para que él se mantenga*".

Desde el nivel IIIA, por lo tanto no hay reacción, que sea llamada retención, resistencia o empuje de regreso, ella constituye una fuerza activa homogénea a la "acción" y la prueba es que deber ser proporcionada al peso del agente, mientras que la resistencia pasiva del nivel IIB era concebida con un mayor éxito si el peso del agente era débil (lo que es contrario a una actividad recíproca). Pero si lo ligero debe así resistir a lo pesado y "empujar contra él" lo inverso no es verdadero y el reactivo pesado "no tiene necesidad de empujar" contra los pesos ligeros (NIC) y "es lo suficientemente sólido para soportarlos" (STI). Por consiguiente, hay, en el nivel IIA, reconocimiento de la reacción en caso de asimetría pesada sobre ligera, es decir, en los casos donde en los niveles inferiores había presión, a pesar de la supervivencia de la resistencia pasiva (dureza, etc.) dentro de los casos ligeros sobre los pesados, es decir, dentro de aquellos donde inicialmente la presión del primero era considerada como inexistente.

En el nivel IIB, finalmente la reacción se generaliza por pura deducción ("no veo nada, francamente, por consiguiente yo pienso") en todas las situaciones, y en proporción de la acción, con reciprocidad e igualdad afirmadas como necesarias ("como yo apoyo es evidente que mi dedo sea apoyado"). Es lo que otras investigaciones habían demostrado en este mismo nivel, pero faltaba despejar el mecanismo de las generalizaciones que conducen a estas conquistas sorprendentes de lo inobservable y es lo que intentaremos.

§/6 - CONCLUSIONES.- En la mayoría de las investigaciones precedentes, la generalización permanece mucho tiempo inductiva y destinada a establecer un conjunto de relaciones o de leyes que la generalización constructiva reestructura enseguida deductivamente, agregándoles lo que las hace necesarias y despejando así sus razones: lo observable es entonces integrado poco a poco, sin gran prisa, en el sistema de composiciones operativas que envuelven a lo posible. Por consiguiente, en el estudio presente, lo observable se reduce a la porción congruente, y todo el problema es insertarlo en una gran red de acciones y reacciones que son totalmente inobservables, y mucho más difíciles de alcanzar ya que paradójicamente, ellas son de naturaleza física y forman parte de lo real, pero precisamente en la me-

dida en que lo real se concibe constantemente como un sector de lo posible.

El nivel IA se limita a dos observables: La presión no interviene más que en caso de hundimiento, y éste tiene lugar cuando el reactivo no es duro; de donde un cierto número de generalizaciones inductivas locales permiten prever que los objetos ligeros, como el cubo de plástico, no ejercerán ninguna presión, y que los objetos duros, como la madera o el fierro, no sufrirán ninguna. En el nivel IB, la presión se vuelve susceptible a la graduación ("muy fuerte", "un poco", etc.) y un agente guarda su peso, que es "sentido" por el reactivo sin haber ejercido ninguna presión. Pero si esta presión sentida y no actuada conducirá en lo sucesivo a sobrepasar lo observable, no se trata todavía en IB más que de una extensión del punto de vista propio (la mano pudiendo sentir la presencia de un objeto que parece no pesar).

Dos casos intermedios entre los niveles IB y IIA nos han demostrado enseguida la razón de las dificultades para comprender que la presión se conserva en caso de no-hundimiento: dos fuerzas de sentido contrario están en contacto (el peso del agente, o la dureza del reactivo que "retiene"), o bien, ellas son iguales y no pasa nada, de donde se produce su anulación, o bien una lo toma de la otra y ésta es anulada. Dentro de los dos casos, no se sabría si atenerse a las observables, conservación de dos fuerzas contrarias actuando simultáneamente, ya que una anula a la otra, o las dos se anulan recíprocamente. Es entonces que interviene la generalización constructiva propia del nivel operatorio IIA conservando el peso en calidad de un objeto que no cambia de forma. Así, desde el punto de vista de la lógica, si se conserva, es necesario que la presión subsista y que resulte entonces la necesidad de una fuerza contraria en el reactivo para explicar los casos de no-hundimiento. Las nociones de presión permanente y de reacción deberían lógicamente imponerse desde el nivel IIA. Si no es el caso, es que se trata en estas cuestiones, no simplemente de encuadrar las observables, sino, y lo que es otra cosa totalmente, de inventar realidades en los casos donde la observable parece probar que no sucede nada. La situación de equilibrio entre los dos pesos iguales es, en este sentido, particularmente instructiva ya que existe anulación de algo: todo el problema es entonces saber si sólo anulan sus efectos pero continúan actuando en tanto que fuerzas opuestas, o si se anulan la una a la otra en tanto que actividades y fuerzas. Ateniéndose a las observables, esta segunda solución es la más natural, ya que no sucede nada. Al contrario, la primera exige la invención de dos contenidos nuevos del pensamiento: una fuerza activa sin movimiento, y lo que es todavía más complejo, un reactivo inmóvil desde el principio (mientras que el peso ha sido desplazado y co-

locado sobre él) que ejerza un empuje hacia arriba en respuesta al del peso hacia abajo. Así, si la primera solución se adquiere hasta el estadio IIB y si los niveles IIA, IIB y IIIA constituyen una larga preparación, el hecho notable que explica esta lentitud es que ningún hecho (observable) viene a invalidar o confirmar una de las dos soluciones: sólo la lógica interna, por consiguiente, la coherencia progresiva debida a las integraciones sucesivas y a la generalización constructiva, impone poco a poco la elección adecuada, pero sin otro control que esta coordinación deductiva, a falta de una apelación posible a las experiencias de las que dispone el niño. Es cierto que diversos sujetos (lo vimos en ERI) llegan a constituir observables falsas a título de justificación, pero naturalmente sin que este vínculo deseado entre la deducción y la verificación dentro de los hechos pueda mantenerse más de un instante. No obstante, debe señalarse como término de pasaje posible y momentáneo entre la inducción empírica y la generalización constructiva ya que ésta, por la fuerza de las cosas, debe permanecer puramente deductiva.

A partir de este punto, si los sujetos son poco locuaces en los razonamientos que hacen, es fácil reconstituirlos en los niveles del IIA al IIIA, en vista de sus vacilaciones y contradicciones. Por cuanto toca a la cuestión más simple, que es la generalización de la presión en caso de no hundimiento, la idea de su disminución o cese sobre los objetos pesados es antropomórfica: la fuerza del brazo puede ejercerse o dejar de hacerlo, a voluntad según las situaciones. Por el contrario, si un objeto parece que presiona más aquí que allá, se comprende mal la naturaleza del peso que deja de pesar. Cuando REM, a los 9;1 dice que eso apoya tanto sobre los cuerpos ligeros que sobre los pesados "porque siempre es el mismo peso", expresa bien la razón común de estas generalizaciones cada vez más apremiantes a lo largo del estadio II.

En relación a la reacción, con pasaje gradual, pero cuánto más difícil de la resistencia pasiva al empuje recíproco, la razón de esta evolución necesariamente debe buscarse en el hecho que, si las presiones se conservan con variaciones debidas al solo peso de los agentes, las respuestas de los reactivos deben ser la función. Así, la resistencia pasiva, debida a la sola "dureza", carece de una dependencia funcional: permanece independiente de toda presión y, cuando los hechos sugieren una relación, la opinión inicial es que ella es más fuerte en la medida en que el agente es más ligero, lo que nos conduce a evaluarlo según los resultados de no-hundimiento y a no concebirlo como una actividad. A partir del momento contrario, donde la resistencia no da nada, pero varía en función de las presiones, entonces es necesario que el rechazo del reactivo ya no sea interior ("todo

dentro" como dice ROG, IIA), sino que se obligue en dirección inversa a la del agente, a título de empuje orientado hacia arriba y homogéneo a aquella que el agente ejerce hacia abajo.

En una palabra la generalización constructiva en juego dentro de esta experiencia consiste en componer formas lógicas nuevas para los contenidos dados, a saber, la conservación por la presión y la reciprocidad por las acciones contrarias en estado de equilibrio: aunque efectivamente se trata de física, ella viene a engendrar contenidos nuevos, no sugeridos por las observables, tales como las fuerzas sin desplazamientos y las reacciones invisibles en sus direcciones así como en sus despliegues. La razón de este parentesco entre las generalizaciones constructivas lógico-matemáticas y físicas es que las primeras se instalan directamente en el mundo de las posibilidades, y las segundas, cuya meta no es de ninguna manera parecida y que tiende únicamente a explicar lo real, no lo consigue sino hundiéndose en el universo de lo posible. La "atribución" de las operaciones del sujeto a los objetos mismos, que es en lo que consiste la casualidad, por consiguiente es mucho más, como no nos cansamos de decir, que una aplicación con fines económicos: las nuevas deducciones constructivas que ella necesita conducen a esta inversión revolucionaria de las relaciones entre lo real y lo posible, lo que no significa un éxito menor en este modo de generalización.

CAPITULO XII
LA GENERALIZACION DE LA NOCION DE VELOCIDAD

con E: Dekkers y S. Dayan

El capítulo IX ya nos ha demostrado, no solamente que la generalización ocasiona problemas de diferenciaciones y de integraciones, lo que es previsible, sino que ciertas diferenciaciones (si no todas) exigen, además de procesos de abstracción, ciertos mecanismos generalizadores, como ya lo hemos visto a propósito de las relaciones entre la rotación y la translación de un rodillo. Este problema de relaciones entre las diferenciaciones e integraciones, es el que quisiéramos reexaminar aquí, pero sobre una cuestión mucho más extensa, que es la de los caracteres comunes de las diferentes formas de la idea de velocidad. En efecto, si existe una intuición precoz de la velocidad de carácter original, fundada en el simple adelantamiento, y por consiguiente independientemente de la duración, las variedades más evolucionadas de este concepto cinemático implican todas una relación con el tiempo transcurrido (duración) y no únicamente con el orden de sucesión temporal y espacial: por supuesto, es el caso de la velocidad-desplazamiento (y bajo sus dos formas, angular y lineal), pero es también el de la velocidad-frecuencia. Ciertamente, una frecuencia no relacionada a una duración no es más que la expresión de ocurrencias, por ejemplo, en el número de *n* golpes sucesivos, pero cuya significación, según que estos *n* golpes sean concentrados en algunos segundos, o distribuidos en varias horas, lo que constituye precisamente una diferencia de velocidades.

Nuestro problema es, entonces, examinar cómo el sujeto llegará a subordinar la velocidad lineal, la velocidad angular y la velocidad-frecuencia a la duración y vemos que aquí se presentan dos cuestiones solidarias: una de diferenciación, en particular por la distinción torpe que hacen los sujetos jóvenes de las velocidades angular y lineal, y otra de integración, en particular por la interpretación de la velocidad frecuencia en tanto relacionada a la duración. Además, esperamos demostrar que los procesos diferenciales exigen ciertas generalizaciones, ya que la abstracción no es suficiente sin un cierto número de comparaciones sucesivas.

Técnicas.- Los procedimientos empleados han sido de tres tipos:

I/Una rueda de 5 cm., de diámetro, provista de una banda roja de 2mm., de ancho; atrás una pantalla con una abertura de 2mm., también y con la longitud de radio que permite notar las apariciones de la banda roja. Se hace voltear pidiendo al niño describir lo que ve, luego varía la velocidad y cuando el sujeto ha declarado "más rápido" o "más lento", se hace precisar "¿cómo lo ves?". Después de las respuestas "más seguido" o "se espera de más" se pregunta si hay medios de "estar seguro": si el niño ya no encuentra nada, se sugiere contar o utilizar un cronómetro. Hecho esto, se retoman las comparaciones, analizando los métodos del sujeto.

II/El segundo procedimiento, utilizado sobre los mismos sujetos, consiste en hacer comparar la velocidad lineal con la velocidad frecuencia, pero dirigido al número de vueltas. Se utiliza la rueda anterior, con una pastilla como señal sobre la llanta y la hacemos rodar sobre la mesa. Primero son las preguntas: 1) ¿La rueda llegará más lejos si da más vueltas y a dónde llegará después de n o n' vueltas? 2) Si da el mismo número de vueltas, pero si se lanza más rápido (o más lentamente) ¿a dónde llega? 3) Cuando una rueda da más vueltas que otra, ¿va ella más aprisa, etc? Se pregunta igualmente si la duración es función del espacio recorrido, o función inversa de la velocidad.

III/La tercera interrogación (a otros sujetos) nos ha llevado sobre las velocidades lineal y angular a ruedas que dan vueltas sobre sí mismas en un engranaje, dispuestas verticalmente. En la base está una gran rueda amarilla (designada por J o J^1) de 21 dientes, por encima gira una pequeña rueda roja (R) de 9 dientes. Esta última acciona una rueda azul mediana (B) de 15 dientes y en algunas ocasiones superponemos todavía una segunda rueda amarilla (J^2, 21 dientes). Primero hacemos anticipar, luego constatar y describir el sentido de las rotaciones, a título de índices sobre la lectura de las observables. Luego quitamos B y hacemos prever, luego constatar lo que hace la rueda R si le damos una vuelta completa a J (con una señal sobre el diente). Se pregunta enseguida si hay un medio de saber cuántas vueltas va a dar R por 2 vueltas de J, y se hace la pregunta de sus velocidades respectivas en diferentes condiciones, así como de tiempo, sugiriendo eventualmente contar los dientes. También se ha preguntado, a ciertos sujetos si una hormiga sobre la señal de J y una otra sobre la de R recorren el mismo camino, etc.

Sección I/LA VELOCIDAD-FRECUENCIA

§/1- *EL ESTADIO I Y EL NIVEL IIA.*- Desde los niveles preoperatorios, la frecuencia ya se percibe y se concibe como una velocidad, sea ligada a un movimiento como en nuestro dispositivo o simplemente a sonidos sucesivos o a flashes luminosos en intervalos variables.[26] En nuestros resultados presentes, hay que distinguir

[26] Es así como G. Voyat, deseando estudiar la percepción de las duraciones en estado puro, presentó a sus sujetos secuencias de flashes para comparar de dos en dos, uno de ellos incluyendo intervalos más largos que el otro. Así, contrariamente a las observaciones corrientes, no encontró una sobreestimación de los últimos efectos presentados (error sistemático conocido por los psicofísicos bajo el término de "errores tem-

primero dos niveles, uno (IA) donde esta velocidad está evaluada en función de la acción propia (ver mejor, etc.), y otro (IB) donde principia un tipo de frecuencia, no tanto por la relación entre el número y la duración, sino solamente en términos implícitos. He aquí ejemplos del nivel IA:

DEN (4;8) describe lo que ve pero declara "*Yo no creo*" que se mueva para atrás. Distingue los casos donde "*va despacio*" porque se ve bien el rojo y donde "*iba muy fuerte* (rápido)" porque "*no se puede ver el rojo*".

XIA (5;0) no ve como movimiento más que "*alguna cosa que sube, así* (gesto vertical)". Ella evalúa la velocidad por el hecho que "*tú le haces muy rápido y no puedo ver el ojo*. -¿Cómo sabes que va muy rápido? -*Porque alumbraste rápido*. -¿Y ahora? *Despacio*. -(Todavía más lento). -*No se ve nada... no llega... ¡Ya vino!*", luego: "*Ah, es el blanco el que se mueve, es el rojo el que empuja* (esta vez el movimiento es indicado en dirección horizontal)".

Ahora, dos casos del nivel IB:

MUR (5;11) invoca lo mismo como criterio de velocidad: "*Casi no veo el rojo*. -¿Y lentamente? -*Yo veía el rojo... Veo el rojo largamente*".

JAC (6;10): "*Ah, ya va más lentamente*. -¿Cómo lo sabes? -*Porque veo mejor los trazos. Eran más espesos*. -Y rápido? -*Se les veía más pequeños y casi por todos lados* (principio de frecuencia traducida espacialmente)".

Vemos que en el nivel IA el único criterio de la velocidad frecuencia es que con su aumento no se ven bien los trazos, mientras que "lentamente" se les puede ver mejor. En el nivel IB estas referencias a las facilidades de la percepción se invocan todavía (y continuarán siéndolo más tarde), pero se agrega, en el caso de JAC la notación "por todos lados" para decir que los trazos rojos regresan sin cesar, y en el caso de MUR un principio de duración "veo largamente (el rojo)" en el sentido de "tengo el tiempo para verlo" lo que es todavía una puesta en relación con la acción propia, pero anunciando las evaluaciones de intervalos temporales que caracterizarán el nivel IIA.

En este sub-estadio IIA (7-8 años en promedio), todavía estamos lejos de una relación entre el número de elementos percibidos y la duración, pero la frecuencia interviene más o menos explícitamente en términos, sean cuantitativos ("más", "mucho", "seguido"), o cine-

---

porales"). Entonces le sugerimos comenzar por preguntar a sus sujetos lo que veían sin referirse a la cuestión misma de la duración: así la gran mayoría respondió en términos de velocidad (luces que venían "más rápido" o "más lentamente"), lo que restableció naturalmente el error habitual de sucesión.

máticos, pero relativos a los intervalos ("regresar" más o menos rápidamente) y sobre todo en los pasajes del trazo rojo:

MOL (6;11): "*Eso da vueltas más rápido... Se ve mucho el gris y no mucho la aguja* (roja). *Lentamente, ya no vemos la aguja.* ¿Eso sirve para contar? -*No lo creo*".

VAL (6;11): "*Eso va más lentamente, porque vemos pasar menos seguido* (el rojo)" y "*rápido porque pasa más seguido*". Por lo que toca a las relaciones de números y de tiempo, ella se imagina que "*cada vez que vemos pasar* (el rojo) *quiere decir un minuto*" como si la relación no se viera modificada por la velocidad.

COR (7;5): "*Eso iba menos rápido porque esperábamos 5 min. y luego regresaba*", por consiguiente, menos rápido cuando no se veía "*mucho*". Por el contrario, cuando ella cuenta los trazos rojos (por sugestión), ella encuentra 26 por rápido y 16 por lento, pero se sorprende de la diferencia de números: "¿Es normal? -*No.* -¿Podríamos tener lo mismo? -*No sé*".

BAR (7;5) juzga el aumento de velocidad en el pasaje de un trazo rojo: "*va lentamente*" o "*pasa rápido*". Cuando se sugiere contar, no son los números encontrados los que le parecen significativos, sino el hecho que con la velocidad "*yo conté durante largo tiempo*", llegando a concebir la velocidad proporcional a la duración.

DOM (7;8) juzga igualmente la velocidad con un "*trazo rojo que pasa*" más o menos rápidamente, mientras que en el movimiento lento "*había un trazo blanco que se alumbraba y se apagaba.* -Volví a hacer como la primera vez (rápido). -*No, no es lo mismo* (a causa de los rojos)". Entonces, se le presentan dos series de puntos, espaciados o apretados: "¿A qué se parece la primera vez? (rápido) -El muestra la frecuencia más grande. -¿Y la segunda? -(Menor frecuencia)".

OLG (8;0) Rápido: "*Siempre es rojo.* -(Lento)-*Es blanco.* -¿Por qué? -*Porque el blanco iba más rápido* (en razón de su frecuencia acrecentada)". No obstante, la primera presentación (la velocidad más alta) se juzgó la más rápida, pero esto no ayudó a nada a contar, ni a observar el tiempo en un reloj.

GIA (7;10): el mismo criterio ("*el trazo* (rojo) *iba rápido*") pero él no encuentra "realmente" útil ni contar ni medir el tiempo.

MAR (9;9) a pesar de su edad sólo juzga el intervalo de regreso de los rojos según "*regresan más rápido*" o no, y encuentra que contar o medir el tiempo "*es completamente inútil*".

Estas reacciones son un progreso neto sobre aquéllas de los sujetos precedentes, ya que se refieren más o menos explícitamente a la frecuencia. El sujeto MOL se contenta con oponer "mucho" a "no mucho", sin precisar si se trata de varias apariciones (como en el caso de COR) o de una sola que se ve más o largamente (como con BAR, GIA y DOM). En este último caso, el sujeto ha tenido a bien no considerar más que un evento aislado (el trazo rojo "pasa rápido", dice BAR, etc.); es claro que su estimación implica la frecuencia, ya

que si "va rápido", "regresa" igualmente rápido (COR y MAR), y en este caso "pasa más seguido" (VAL), que es la expresión explícita de la frecuencia, que DOM no formula, pero admite tan pronto como uno le muestra los puntos espaciados o agrupados. Por consiguiente, hay en cada uno de estos casos una afirmación, explícita o implícita, de frecuencia por lo que se puede hablar de una velocidad-frecuencia en proceso, en comparación con el nivel IB.

Pero lo que llama la atención es que si cada uno de estos juicios implica la duración o el número, todavía no interviene en este nivel ninguna puesta en relación del conjunto entre el número de trazos y la duración de la presentación. Por consiguiente, es evidente que los términos "seguido" o "mucho" implican un número y que esperar el regreso del trazo rojo, o declarar que "pasa rápido", implican duraciones (al nivel IB, MUR traducía ya "pasa lentamente" a "ver por mucho tiempo"). Entonces, ¿cómo es posible que estos sujetos consideren o declaren "completamente inútil" contar esos trazos o medir el tiempo? Es que las nociones que utilizan para expresar la velocidad-frecuencia permanecen esencialmente indiferenciadas: "seguido", "mucho", regresar o pasar "rápido" ciertamente pueden conducir a relaciones entre el número y la duración, pero a condición de disociar estos conceptos en sus componentes implícitos, para que no aparezcan inútilmente al sujeto como el producto de composiciones que son autosuficientes en tanto que aproximaciones cualitativas que proceden de intuiciones globales e indiferenciadas. De hecho, sólo se diferenciarán para separar los elementos comunes cuando se trate de generalizaciones tendientes a comparar diversas situaciones: son entonces las comparaciones generalizadoras que obligarán a los sujetos a encontrar instrumentos para poner en relación inter-situaciones, de aquí el recurso necesario de las enumeraciones y de la cuantificación de duraciones.

§/2- *EL NIVEL IIB Y EL ESTADIO III*.-Es durante el transcurso del sub-estadio IIB (entre los 9 y 10 años) que principia estas consideraciones, pero todavía con numerosas dificultades para construir la relación entre el número y la duración de toda una secuencia por oposición a los intervalos o a los pasajes individualizados de un solo rasgo:

LUG (8;10) juzga que eso "*da vueltas muy rápido porque él* (el trazo rojo) *regresaba de inmediato.* -¿Qué podrías hacer para estar seguro?- *Algo, pero no sé qué.* -Los niños dicen que hay que contar: ¿tienen razón? -*No sé. Posiblemente ellos saben lo que hay que contar, pero yo no.*- ¿Y este cronómetro podría ayudar? -*Sí* (por ver) *cuántos segundos hacen*". Entonces, él mide 15" para dos frecuencias distintas: "*Lo mismo: 15*" -¿Qué quiere decir esto?- *Que los dos tienen la misma velocidad.* -¿Cuántas vueltas?- *No las*

conté. -¿Estás seguro que hice las dos veces la misma velocidad? -*Sí*. -*Sí* -¿No fue necesario observar los trazos?- *No creo*". Posteriormente dice correctamente: "*Debimos haber contado las vueltas*. -Si tú contaste las dos veces durante 15" ¿tú podrías saber cuál de las dos fue más rápida? -*Sí, pero también podemos saber sin el cronómetro*".

ARI (9;2) dice de entrada "*Más rápido porque los* (rojos) *veíamos más seguido*" pero no se imagina lo que podemos hacer para ayudar. "¿Contar? -*Sí. cuando va más rápido y B lentamente*, (ella cuenta). *¿Cuándo fue más rápido contamos más veces las líneas*-. (Hacemos girar 9 veces más rápido? -*La primera vez*. -¿Y es suficiente contar así?- *No* (ella ríe) -Entonces, ¿qué hay que hacer más?-... "Sugerimos el cronómetro: ¿Es útil para conocer la velocidad? -*Sí, podemos contar cuántos segundos hay entre cada línea: si hay menos segundos, gira más rápido*".

WIL (9;4): "*Las líneas* (rojas) *iban más aprisa* (en su paso). -¿Qué hacer para estar seguro?- *Ni sé*. ¿Contar? -*No sirve de nada*-. ¿Y con el cronómetro? -*Sí, con eso*". 30" y 50": "*La segunda vez va más rápido*. -¿Porque toma más tiempo?- *Sí*".

CAR (9;6): "*Cuando va más aprisa, vemos el rojo más seguido*. -¿Qué hacer para estar seguro?-... -¿Sirve contar?- *Sí* (dubitativa)". Ella cuenta mentalmente 10 y 7 durante cada vuelta: "*La segunda vez más rápido*. -¿Por qué?- *Porque hay menos números*", y ella precisa que eso significa "*menos tiempo*".

VIL (9;11) más aprisa cuando "*se le ve más seguido*", pero cuando se trata de contar (no espontáneamente) ella dice: "*Cuento 10 veces* (en voz baja) *mientras que yo no veía* (el trazo rojo)", dicho de otra manera, ella media el intervalo temporal entre las apariciones. Ella acepta el cronómetro, pero juzga la velocidad superior cuando "*son más vueltas y más segundos*" lo que no significa nada.

CAR (10;11): "*Lo he visto pasar varias veces*. -¿Y para estar seguro?- *Contar*". Entonces, ella cuenta durante los intervalos como MER, y encuentra 6 y 4. "El cuatro, ¿qué quiere decir? -*Que ella va más rápido* (cierto)-. ¿Más rápido hasta 4? -*Ah, no, cuando iba más más rápido conté más de 6*". Pero con el cronómetro, ella encuentra correctamente que una vuelta de 1 "*va más rápido que con 3*".

MET (10;3) comienza como VIL contentándose con contar durante los intervalos lo que queda, por consiguiente aproximativamente, pero con el freno él alcanza la precisión: "*Cuento el tiempo cuando el disco gira*. -¿Qué es necesario observar?- *La barra roja, hace 6*" (entre dos pasajes de la señal) *y aquí 2*". -¿Más rápido?- *La segunda vez*". De esta forma alcanza el estadio III.

Antes de comentar estas reacciones, he aquí todavía unos ejemplos de este estadio III donde el problema está resuelto, sea a través de una medición de intervalos, pero observando entonces las condiciones de precisión, sea, lo que resulta novedoso, poniendo en relación el número de trazos rojos y la duración total de la secuencia:

ZUP (11;0): cuando va aprisa "*la banda roja regresa más aprisa y más seguido*. -¿Y para estar completamente seguro?- *Si es regular* (¡!) *yo cuento 1,2,3,4, cada vez que veo la banda roja*. -¿Y si (las dos secuencias) se parecen mucho?- *Tomamos un reloj y observamos cuántos segundos hay entre dos rojas*".

SYL (11;5): "¿Si no estás seguira? -*Cronometrar: desde que veo por primera vez* (el rojo) *apoyo y la segunda vez paro.* -¿Qué es eso?- *El tiempo de transición. Comparo las dos* (secuencias presentadas)".

OLI (11;2) más aprisa "*vemos más seguido el trazo rojo.* -¿Cómo estar seguro?- *Observamos durante un minuto cuántas vueltas da*".

MAN (12;4) *propone primero contar las vueltas, luego comparar los tiempos cuando se hace cada vez 3 vueltas; finalmente* "*se gira 15" y se cuentan los trazos*". La velocidad de la rueda es "*el número de vueltas en un tiempo determinado*".

Comenzando por estos últimos casos, dos observaciones se imponen. La primera es que cerca de la mitad de los sujetos de 11-12 años llegan finalmente a contar el número total de trazos rojos (o lo que es lo mismo, de vueltas) en lugar de mantenerse en la aproximación cualitativa "más seguido". Así, es de notar que esta noción de número total se constituye al nivel donde se relaciona con la duración (y la contrariedad de ARI en IIB es reveladora ya que ella reconoce riendo que contar 9 y 13 no sirve de nada si no tiene que ver con las secuencias, por comparar). Dicho de otra manera, es la búsqueda generalizadora de caracteres comunes a dos velocidades diferentes lo que conduce a la diferenciación del término "seguido" en dos conceptos unidos por una relación necesaria: el número total y el tiempo empleado. También, poco más de la mitad de los sujetos del estadio III se mantienen en la medida del intervalo temporal entre la desaparición del trazo rojo y su reaparición, por lo que la duración de una sola vuelta, la cual puede ser suficiente, varía en proporción inversa de la velocidad. Pero, segunda observación, esta medida de t/1 (donde t es la duración de una vuelta), no tiene sentido si no es la expresión de T/N (donde T es la duración total de N vueltas); y es lo que ZUP admite unicamente de manera implícita, aunque ella puntualiza diciendo "si es regular", es decir, si las vueltas de una misma secuencia son homogéneas (sin hablar del conteo del niño que piensa con razón que, si las secuencias por comparar se parecen mucho, es mejor utilizar un reloj).

Por cuanto a los sujetos del nivel IIB, casi todos emplean el segundo método (salvo ARI, al principio, cuando cuenta los trazos olvidando la duración) y es asombroso ver que, si se sugiere una enumeración, ellos la aplican al intervalo temporal entre dos señales, y no a los trazos mismos. Pero si ellos piensan entonces en la duración, todavía es con muchas confusiones: velocidad en función del tiempo empleado y no de su inverso (WIL), confusión del número de segundos con el de las vueltas (LUC y CAR), etc., y, en una palabra, dificultad para sustituir las relaciones entre variables diferenciadas con los términos globales de los niveles anteriores.

§/3- *LAS VUELTAS DE LAS RUEDAS SOBRE LA MESA*.- Cuando la rueda precedente, en lugar de girar sobre sí misma, avanza sobre la mesa, los problemas consisten en colocar el trayecto que ella recorre en un tiempo determinado, es decir, su velocidad lineal en relación, no sólo con el número de sus vueltas (frecuencia), sino con su velocidad de rotación, o velocidad angular. Una vez expuestas estas cuestiones, se reparten en dos categorías; una, en la que sólo se mencionan el número de vueltas, el espacio recorrido y la velocidad, pero sin referencia a la duración, y otra donde se exponen las tres condiciones de duración, de espacio recorrido y de velocidad, lo que facilita naturalmente las diferenciaciones y rotaciones, de donde surge una oposición instructiva entre los resultados.

He aquí unos ejemplos del estadio I (hasta los 7-8 años):

BRO (6;8); "Le doy una vuelta, ¿a dónde llega (exp.)? -*Allá* (señal roja a 10 cm.)-. ¿Y dos vueltas?- *Allá* (18 cm.) Y ¿empujando fuerte? -*Nó, se iría muy lejos*-. ¿A dónde? -*Al suelo* (ella dejó caer su brazo por encima del borde de la mesa)-. Si yo hago girar rápido, ¿una vuelta a dónde llega? (Siempre de acuerdo a la seña). -*Allá* (10 cm.)-. ¿Y si yo hago girar lentamente? -*Allá* (5 cm.) - Yo voy a lanzar dos veces la rueda con la misma fuerza ¿hace falta más tiempo para una vuelta o dos? -*2 vueltas*-. ¿La rueda gira muy suavemente? -*2 vueltas* (van más rápido)".

DAN (6;11): "¿A dónde llegan dos vueltas? -*Allá*-. ¿Y si la hacemos girar rápido? -*Más lejos*-. ¿Y lentamente? -*Allá* (más cerca)-. Las haré girar muy lentamente (1 y 2 vueltas). ¿Una va más rápido? -*Sí, aquélla* (2 vueltas)-. ¿Cómo sabes? -*Porque se fue más lejos*".

ARD (6;10): Una vuelta rápida y otra lenta: "¿Toman el mismo tiempo? -*No*-. ¿Cuál más? -*Cuando va más lentamente*". Por el contrario, con el espacio, 2 vueltas rápidas llevan "*posiblemente allá*" y las dos lentas "*menos lejos*".

MEN (7;10): 5 vueltas llevan más lejos que 2 y toman más tiempo, pero con 2 vueltas una rueda va más aprisa "*porque es más cerca que con 5 vueltas*", por consiguiente ir más rápido = llegar antes. "¿Y si la lanzo lentamente, a pesar de ello va más aprisa? -*Es difícil de explicar*" pero él conserva el "*más aprisa*". Por otro lado, 5 vueltas rápidas llevan "*más lejos*" y 5 lentas "*más cerca*".

GAY (7;8): más vueltas llevan "*más lejos*" y en más tiempo. Pero si se lanza fuerte con 2 vueltas "*ella va más lejos*" que lentamente. "Se podría hacer que 4 vueltas tomaran menos tiempo que dos? -*Sí, lanzando muy rápido las 4*".

Estas reacciones son muy claras, en sus éxitos como en sus fracasos. Por lo que toca a los primeros, todos estos sujetos saben decir que ir más lejos a la misma velocidad toma más tiempo, y que un mismo espacio recorrido toma más tiempo si la velocidad es menor:

y es que entonces, como ya se dijo, la consideración de la duración está explícita en la pregunta, que se refiere en estos casos a los tres términos de velocidad, de espacio y de tiempo. Otro éxito, que es general también, pero sin alusión a la duración, es la afirmación que "más vueltas" de rueda conducen "más lejos", pero como no se pide ni contar las vueltas, ni establecer una correspondencia métrica entre su número y el trayecto lineal, lo que sería un problema, la simple relación "más   más" es suficiente cualitativamente.

Por el contrario, es muy significativo constatar que en la ausencia de toda referencia a la duración, un aumento de velocidad para un mismo número de vueltas, llevará "más lejos", como si una misma vuelta no correspondiera a un trayecto lineal constante[27], por lo que en este caso, la velocidad modifica exclusivamente la duración, y no el espacio recorrido. Pero volvemos a encontrar aquí la noción global de velocidad, no diferenciada en las relaciones entre el espacio y el tiempo, y que en otras investigaciones (sobre la velocidad-desplazamiento), se ha mostrado como esencialmente ligada a la intuición ordinal del adelantamiento: la rueda con vueltas más rápidas sobrepasará entonces a aquélla cuyas vueltas (siendo el mismo número) son más lentas, de donde más rápido = más lejos, como si las vueltas más rápidas equivalieran a "más vueltas". De aquí proviene el segundo error bastante sistemático: "más vueltas" equivalen recíprocamente a "más rápido" (salvo algunos casos, como el de MEN, para quienes "menos vueltas" significa "más cerca", es decir, llegado más aprisa). Es cierto que el niño piensa, a veces frecuentemente, que más vueltas resultan de una lanzada más fuerte desde el principio, también hay que insistir siempre en la igualdad inicial, pero se ve (como en el caso de BRO) que eso no cambia nada.

En el estadio II, los sujetos comienzan de la misma manera, pero se corrigen espontáneamente, o después de la medición de una vuelta sobre la mesa:

BIR (8;10) enseña el lugar donde piensa que llegará la rueda después de unas cuarenta vueltas. "¿Y si la lanzamos lentamente? -*Más cerca.* -¿Y más rápido? -*Un poco más lejos que el otro extremo de la mesa.* -¿Y lentamente? -*¡Ah, también!* -¿La velocidad no cuenta? -*No.* -¿Y con toda velocidad no puedo hacer que llegue más lejos? -*No.* -¿Y con esta ruedita? (otra) -*Allá* (más cerca). -¿Por qué? -*Porque es menos grande*".

OLG (8;0): Las mismas reacciones iniciales. "¿Se puede adivinar justamente hasta dónde llegará después de una vuelta? -*Hay que tratar*". Ella mide el trayecto y com-

[27] VINH-BANG en particular ha demostrado ("Estudios", vol. XXIII, cap. X y XI) que la conservación de la distancia recorrida en cada vuelta por una misma rueda se adquiere en el estadio II (66% de los casos, a los 8 años).

prende entonces que con dos vueltas es el doble, etc., independientemente de la velocidad.

ARI (9;2) al principio también cree que por un mismo número de vueltas, el trayecto depende de la velocidad, luego, para controlar, ella mide la circunferencia y la inscribe linealmente ¡sobre la mesa! "¿Y después de 10 vueltas? -*10 veces la vuelta de la rueda.* -¿Y si se va muy lentamente? -*También así.* -¿Rápido o lentamente? -*No tiene importancia*". No obstante, ella comienza por creer que una rueda va "*más lentamente con 1 vuelta, y más rápido con 3*" luego se regocija diciendo que la velocidad depende de la "fuerza" de lanzamiento "*entonces ella va más rápido o menos.* ¿Qué significa eso? -*Cuando toma menos tiempo, ella va más rápido*". Esto no le impide que un momento después sostenga que, si se cuentan las vueltas durante un minuto "*menos vueltas significa que va más rápido.* -¿Segura? -*No del todo*" y se corrige.

Así, volvemos a encontrar las situaciones intermediarias y las dubitaciones de los niveles IIA y IIB. La generalización que permite aquí diferenciar la duración variable del espacio recorrido, invariable para un mismo número de vueltas, consiste, como se ve, en un proceso recursivo procedente de 1 vuelta = x por n vueltas = nx, lo mismo que en los niveles IIB y III del § 2, el descubrimiento del papel de la duración supone un pasaje de lo que es visto sobre un trazo a lo que se construye sobre n trazos. Finalmente, he aquí las reacciones del estadio III:

SYL (11;5) por el trayecto de 1 vuelta mide, de entrada, los 16 cm. del perímetro y los traslada a la mesa. "¿Y 3 vueltas? -*3 veces 16 cm.* -¿Segura? -*Sí, sí, completamente.* -¿Y tú puedes saber cuándo va más rápido, con 1 vuelta o con 3? -*Ni lo uno ni lo otro.* -¿Qué es lo que hay que saber? -*Cómo ha sido lanzada.* -¿Y si yo lanzo muy fuerte? -(Muestra alrededor de 30 cm.: residuo de conductas anteriores). -¿Y lentamente? -*Mm, también 16 cm. para la otra* (muy fuerte) *también 16 cm.* -¿Qué es la velocidad? -*El tiempo que toma de ir de aquí a acá* (1 vuelta)...*la distancia recorrida durante un cierto tiempo*".

ANT (12;0) mide de entrada 1 vuelta = 17 cm. "¿Y 5 vueltas? -*5 veces 17.* -¿Y si yo lanzo 1 vuelta o 5 vueltas, cuál va más rápido?-... -¿Hay alguna manera de saberlo? -*No creo.* -¿De qué depende? -*De la distancia, ah no, del tiempo.* -¿Qué es la velocidad? -*Se mide la distancia y el tiempo que ella hace.* -¿Aquí es la distancia? -*No, las vueltas.* -¿Siempre que hablas de velocidad, comer rápido, correr, escribir, ir en auto? -*Siempre está el tiempo*".

WER (13;2) las mismas reacciones. Por n vueltas, la rueda llega siempre "*al mismo sitio.* -¿Segura? -*Pero claro.* -Puedes decir de una vuelta o de 3 ¿cuál va más rápido? -*No, yo no creo, porque la velocidad es el tiempo que toma en dar 1 vuelta*" y de manera general "*cierta cosa que se calcula en un tiempo limitado*".

Por lo que respecta al trayecto recorrido en un mismo número de vueltas, con velocidad variable, la respuesta es, por lo tanto, de inmediato correcta, aparte del error prontamente corregido por SYL.

En cuanto a las velocidades inherentes a los diferentes números de vueltas, la novedad es que estos sujetos ya no buscan una solución, sino comprenden que no es posible ("no, yo no creo" dicen ANT y WER) en tanto que no se precisen las duraciones, de donde surge la definición general que ellos dan de la velocidad, y de la cual ANT dice vigorosamente: "siempre hay el tiempo".

§/4- *LA VELOCIDAD DE LOS ENGRANAJES.*- Si la velocidad angular de las ruedas (rotación) se coordina progresivamente con la velocidad lineal por el intermedio de la velocidad-frecuencia (número de vueltas), es posible que en el caso de la rueda que avanza sobre la tabla, las dos variables de la rotación y de la trayectoria horizontal no tengan que ser diferenciadas, siendo ya distintas por el dispositivo. ¿Cómo será en el caso de un engranaje entre una rueda pequeña y otra grande, cuyas velocidades angulares (número de vueltas o velocidad de la señal) no son iguales, y las velocidades lineales (número de dientes engranándose sucesivamente, independientemente del número de vueltas) son iguales? He aquí un problema bastante más difícil, ya que no hay más relación directa entre las dos velocidades, pero por lo mismo merece un atento examen.

El estadio pre-operativo I, en el que la velocidad es evaluada con referencia a la acción propia, se caracteriza así mismo en la experiencia actual, por una ausencia completa de consideración del número de vueltas o de dientes, por consiguiente, por evaluaciones simplemente perceptivas, y en el caso particular, notablemente flotantes, e incluso inadecuadas para las observables:

STE (4;8) pretende que las 4 ruedas van a la misma velocidad: "Y cuando R (pequeña) dé una vuelta, aquélla (J1 grande), ¿qué va a hacer? -*También.* -Observa: le falta todo esto. Entonces, ¿J ha dado una vuelta o no? -*Sí*". Por cuanto al sentido de rotación, él los describe muy bien poco a poco, pero después pretende que las contiguas van en el mismo sentido 1-2 y 3-4, y la segunda pareja en el sentido inverso de la primera.

BOU (5;0) dice que el amarillo J1 y el rojo R van "*lo mismo de suave*". Le hacemos notar la diferencia entre las señales: "¿Cuál llegó primero? -*Aquí* (R: cierto). -Entonces, ¿cuál gira más rápido? -*Las dos van más rápido*". Bajo sugestión, ella admite que "(J1) *va más despacio que* (R). -¿Y J1 y J2! -*Vamos a ver* (exp.) *J1 va más rápido* (de hecho igualdad). -¿Cómo lo logra? -*Me fijé muy bien*".

MAR (5;6): "*R lo mismo (velocidad) que J1*", a pesar de que nos hayamos centrado sobre las señales: "Observa bien (rotación lenta). -*R da 3 vueltas de más*", pero ella concluye que "*ellas van a la misma velocidad, pero la roja* (pequeña) *toma más tiempo*".

FRA (6;1) las mismas reacciones. Tratamos de centrarla sobre las señales, pero ella cuenta dos o tres dientes. Conclusión final: "*Ví que J iba más lentamente y R más rápido.* -¿Y ahora (se acelera ligeramente)? -*Las dos van aprisa, algunas veces las 2*

lentamente, y otras veces las 2 rápido. -¿Y la J algunas veces más rápido que la pequeña? *-Sí".*

Es inútil multiplicar los ejemplos: las velocidades son evaluadas subjetivamente sin referencia a los números de vueltas o de dientes, ni relación constante con el tiempo, y ellas varían sin razón, lo mismo que los tiempos y los sentidos de rotación. La idea espontánea inicial es simplemente que las 4 ruedas van a la misma velocidad ya que sus rotaciones son solidarias.

El sub-estadio IIA marca un progreso evidente, como en el caso de los sujetos del § 1: se establecen ciertas relaciones entre la velocidad y los números de vueltas o de dientes, y entre ellas y el tiempo, pero estas relaciones se mantienen sin coordinación, sin sistema de conjunto:

PHI (7;6) prevé inversiones de rotación pero piensa que R y B contiguas girarán en el mismo sentido. Con la constatación ve de entrada que "*ellas están todas mezcladas* (=alternancias)". Por cuanto a las velocidades, él constata: "*2 vueltas la R* (pequeña). *1 vuelta la J. La roja* (=pequeña) *gana más tiempo.* -¿Entonces? *-Eso quiere decir que va más rápido.* -¿La J va menos rápido aun cuando giramos lentamente? *-Sí, porque si vamos lentamente, ella es la que siempre pierde.* -¿Porqué ellas no toman el mismo tiempo? *-No tengo ni idea.* -¿Porque una es más grande y la otra pequeña? *-Eso no tiene que ver, porque ellas van a la misma velocidad* (él se concentra ahora sobre los dientes)... *Sí, porque si la J gira, hace girar a la R porque ella se bloquea* (engranaje). -Pero la R ¿termina su vuelta antes? *-La R si gira pierde tiempo y J gana.* -¿Una termina su vuelta antes que la otra? *-Es la J* (exp.), *no, es la R porque ella tiene menos agujas* (dientes). -¿Quieres contar? *-Sí* (exp.) *9 y 21. Es la R la que gana.* -¿Pero antes decías que tenían la misma velocidad? *-Ella gana más rápido porque tiene 9 dientes.* ¿Entonces, ella va más rápido y no va más rápido? *-Sí.* -¿Qué es lo cierto? *-Lo cierto es decir que las dos van a la misma velocidad.* -¿Porqué? *-Lo vemos.* -¿Así nada más? *-Pero también cuentan los dientes y el papelito* (la señal). -¿Cuál toma más tiempo para dar una vuelta? *-La R, si la J tomara más tiempo, tendría menos dientes.* -Pero en una carrera el primero que llega, ¿toma más o menos tiempo? *-Más tiempo".*

GOP (7;11): "*La pequeña va más rápido.* -¿Cómo lo sabes? -(Aceleración) *-Las dos van a la misma velocidad porque giran juntas* (engranaje). *-Es justo decir que ellas tienen la misma velocidad porque giran juntas y que la pequeña va más rápido? -Sí* -Entonces ¿es la misma velocidad y no la misma al mismo tiempo? *-Sí.* -¿La roja va más rápido? *-No.* -¿Qué es lo cierto? *-Ellas giran juntas".* Se cuentan las vueltas: J=1 y R=1 y 1/2. "¿Es raro o normal? *-Es normal porque ella es más pequeña".* Una hormiga en la circunferencia de J hará un camino más largo "*porque ella es más grande.* -¿A la misma velocidad o más rápido? *-Una va más rápido, la pequeña".*

MUN (8;2) prevé que la grande (J) irá más rápido. Después de ensayar: "*Ah no, las dos van rápido.* -(Se acelera) -¿Las dos tienen la misma velocidad? *-Sí... la roja* (R) *va más rápido".* El conteo de vueltas (sugerido) confirma este juicio. "Colocamos una hormiga sobre el borde (circunferencia) de la J y otra sobre la R: ¿Hacen el mismo camino? *-Ya que la R va más rápido, ella camina más... como da más vueltas, camina más.* -¿Se puede contar los dientes? *-Sí: 21 y 9.* -Entonces ¿un camino de 9 dientes

para la R! -*No, porque ella ha girado más veces*". Después de una larga discusión: "*Encuentro que la R ha hecho un camino más largo*".

DEB (8;2) opta primero por la misma velocidad entre R y J: "*Siempre lo mismo, pero del otro lado*", luego "*me equivoqué: la R va más rápido porque es más pequeña... más rápido pero menos tiempo*". Luego regresa a la misma velocidad porque "*R da más vueltas y más rápido, entonces hace lo mismo*" que J.

GAR (8;2): "*Ellas van a la misma velocidad porque cuando miramos R, la J también gira*". Luego ella constata la desigualdad de las vueltas "*porque J es más grande y R más pequeña, ella tiene menos dientes*. -¿Entonces? -*La misma velocidad*. -Pero ¿la R da más vueltas? -*Porque la grande es grande, y la pequeña da 2 vueltas porque es pequeña*. -¿Eso no quiere decir que va más rápido? -*No, porque hay una que tiene más dientes*. -¿Pero por qué la misma velocidad? -*Por los dientes: cada vez hay un hueco, y ella entra allí*. -¿Pero la pequeña da más vueltas? -*Sí, ella va más rápido*. -¿Entonces qué es lo cierto? -*La R va más rápido porque cuando ella da 2 vueltas ella llega más rápido*". Pero la cuestión de las hormigas, después de la misma respuesta ("es más largo el camino de la roja porque da 2 vueltas y 1/2"), la regresa a la igualdad: "*Son los mismos caminos porque por cada vuelta de J hay 21 dientes, y cuando R da 2 vueltas y 1/2 eso da 21 dientes*. -¿Pero no podemos decir que ella va más rápido? -*No*. -¿Las mismas velocidades? -*Sí*".

Desde este nivel IIA, el sujeto tiene en cuenta el papel del número de vueltas de las ruedas y del número de dientes, la diferencia de las vueltas que conducen a velocidades desiguales, y el engranaje de los dientes que conllevan a la igualdad. De dos cosas, una: o bien, lo que es más frecuente, el niño simplemente cambia frecuentemente de opinión, o dice incluso que se ha equivocado (DEB), o bien acepta momentáneamente los dos juicios como si no fueran contradictorios (PHI y GOP) tal vez admitiendo poco después que uno es más justo que el otro. En las edades habituales del nivel IIB (9-10 años) volvemos a encontrar casos similares, pero hay que citar aparte los ejemplos de un cierto número de sujetos que intentan un compromiso para erradicar la contradicción:

MAG (9;10), después de las dos afirmaciones corrientes, dice: "*La J es más grande, entonces da menos vueltas, pero ellas van a la misma velocidad*. -¿Una toma más tiempo? -*Sí, la J porque ella es más grande y tiene más dientes*" y "*ellas van a la misma velocidad porque cada vez hay un diente. La pequeña da dos vueltas, ella es más pequeña pero no va más rápido*".

FRE (9;2): "*Ellas van a la misma velocidad porque hay el mismo espacio entre los dientes*. -¿Pero la R da más vueltas? -*Sí, porque ella tiene menos dientes, y si ella tiene la misma velocidad, ella da más vueltas que la J, que tiene más dientes*".

BAD (10;4): "*Como velocidad, ellas tienen lo mismo. Como vueltas, la J gira menos*".

RIA (11;7): "*La J va más lentamente, pero tiene la misma velocidad: es una cuestión de tamaño de la rueda, porque ella es más pequeña y tiene menos dientes*. -Para dar una

vuelta, ¿es la misma velocidad? -*Ellas no van a la misma velocidad para dar una vuelta, pero ellas tienen la misma velocidad en el sentido que avanzan al mismo tiempo: su paso es el mismo*".

Como compromiso, no podríamos haber encontrado algo mejor. Por consiguiente, hay que cuidarse de ver en estos propósitos una contradicción *in adjecto* del tipo "tengo una gran paciencia, pero la pierdo pronto". En efecto, el gran progreso de estos propósitos sobre aquéllos del nivel IIA es que estos sujetos, en lugar de oscilar entre dos afirmaciones contradictorias, tienen una clara razón de mantener las dos constantemente, y además, tienen el sentimiento muy justo de que en la realidad de los hechos no se contradicen. Lo que les falta todavía es un sistema conceptual que les permita simultáneamente diferenciar los dos tipos de velocidades y de integrarlos en una noción general: logran diferenciar adecuadamente, por generalizaciones respectivas, lo que dan el número de vueltas y los engranajes (un diente corresponde a un diente, dice MEG), pero no ven en ello dos relaciones análogas entre un desplazamiento, o una frecuencia y una duración, de aquí que sean dos velocidades distintas y similares en su forma a la vez, dando proposiciones sorprendentes como la de los inicios de RIA "una va más rápido, pero las dos tienen la misma velocidad". Y la prueba máxima de que nuestra interpretación no es demasiado indulgente y que en el mismo RIA se acerca al estadio III, es cuando declara enseguida: "Ellas no van a la misma velocidad para dar una vuelta, pero ellas la tienen en el sentido que avanzan al mismo tiempo: su paso es el mismo. Esta dualidad de la velocidad (angular) de una vuelta y del "paso" lineal de la marcha es, de hecho, la solución del problema. he aquí un caso completo de este estadio III:

GAD (12;5) constata que la R va más rápido "*porque ella adelantó a la J... si ella tiene un pedazo de más eso quiere decir que ella gira más aprisa*". Pero por otro lado las velocidades son iguales "*porque si giramos, las ruedas se encajan, entonces no se puede saltar un diente*. -¿Pero tú no tienes la impresión que R va más rápido? -*Sí, la roja gira más rápido sobre su eje, pero a la misma velocidad de los dientes, ella no va más rápido*. -¿Entonces habrían dos tipos de velocidad? -*Sí, más aprisa sobre su eje, pero sin embargo no puede saltar los dientes*".

Esta distinción de la "velocidad sobre su eje" y la del perímetro provisto de dientes atestigua esta vez el reconocimiento explícito de dos velocidades distintas, pero coordinadas y ya no contradictorias como en el nivel IIA.

§/5- *CONCLUSIONES: LA IDEA GENERAL DE VELOCIDAD*.- Partiendo de la intuición ordinal del adelantamiento y de percepciones fundadas igualmente sobre el adelantamiento de móviles en relación a los movimientos o expectaciones ligadas a la acción propia, la velocidad termina por constituir una relación entre una frecuencia cualquiera, una trayectoria lineal o una rotación, por un lado, y una duración, por el otro, ya que "siempre hay el tiempo" como dice ANT en el estadio III del §3. De esta manera, estamos presenciando un ejemplo precoz de lo que es la generalización en física: no solamente un proceso inductivo o simplemente extensional que viene a alargar el dominio de leyes verificadas, al principio sobre algunos casos aislados, sino un razonamiento constructivo que consiste en la invención de ideas nuevas, no dadas en el principio y que aclaran las leyes, aumentando una interpretación.

Pero en este caso particular, las nociones de espacio y duración ya son conocidas, por lo que sólo hay que construir su relación. Esta relación interviene implícitamente desde que a la consideración de adelantamientos se agrega la de los intervalos entre el que se adelanta y el que se queda atrás, según que esta diferencia sea más o menos grande y se efectúe en más o menos tiempo. La construcción de la relación es, entonces, lo hemos visto sin cesar, asunto de diferenciaciones y de integraciones. Lo que nos han demostrado una vez más los hechos precedentes es, en primer lugar, que las diferenciaciones no son sólo el producto de abstracciones, sino que ellas exigen una parte de generalización. Por ejemplo, la manera en que los sujetos del nivel IIA (3) descubren que *n* vueltas rápidas no llevan más lejos que *n* vueltas lentas reposa sobre una generalización recursiva: si una vuelta recorre 16 cm. una segunda vuelta hará lo mismo y *n* vueltas harán *n* x 16 cm. En este caso el espacio recorrido se diferencia en el seno de ia velocidad, lo que del mismo modo muestra la laguna de las informaciones sobre la duración. Lo mismo cuando, para los engranajes, el sujeto del nivel IIA descubre el papel del número de vueltas, lo cual se debe a las generalizaciones, no solamente extensionales ("es siempre ella la que pierde", dice PHI de la J), sino constructivas en tanto que despejan las razones ("porque la R tiene menos dientes", dice todavía PHI, o "es más pequeña", GOP, etc.). En resumen, la diferenciación es el resultado de las comparaciones generalizadoras, aunque no sólo de abstracciones, por otro lado estando, necesariamente ligadas.

Por cuanto a la integración, en principio ella incluye en cada caso la puesta en relación variables diferenciadas, luego la comprensión del hecho que el término común de estas relaciones es la duración. Por lo que toca a la puesta de relaciones puede deberse a dos factores. En

un primer caso, se trata de llenar una laguna que proviene del hecho de que la variable considerada hasta este momento no explica todo (por ejemplo, la velocidad no se explica por el solo número de vueltas, sin la duración), puesto que ciertas variaciones observadas no la reemplazan. El segundo caso es aquel en donde dos variables parecen conducir a resultados contradictorios, como el número de dientes y el de vueltas en el momento de los engranajes. En los dos casos, la integración se vuelve así necesaria por la diferenciación, partiendo del hecho que ésta conlleva perturbaciones o desequilibrios (lagunas o contradicciones) y que el reequilibrio no es posible sino a través de la construcción de nuevas relaciones que reestablezcan la coherencia, por consiguiente por una integración. Dicho esto, encontramos en todas las situaciones que la velocidad se caracteriza por el contenido de eventos que se suceden gracias a ella (percepciones en relación con los movimientos o esperas de la acción propia, orden de llegadas, a la meta, adelantamiento en el espacio, trayectos recorridos, frecuencias, etc.), es decir, por sus resultados: la variable que falta en cada caso es la duración, porque ella supone una puesta en relación retroactiva, más difícil que espacial o frecuencial, por el hecho de que ella no se inscribe en los resultados obtenidos, aunque implica una reconstitución. Así, tal reconstitución, exigida por todas las continuaciones de eventos, constituye el contenido de la velocidad, sin importar cuán diferenciados estén (frecuencia, trayectos lineales, o rotaciones); la duración es el término más general de las relaciones que constituyen la velocidad. De estos dos tipos de hechos resultan el carácter tardío, pero también la generalización o integración acabada de la idea de velocidad que se encuentra en nuestro estadio III (fin del §3): "es algo (cualquiera que sea la naturaleza de estos eventos sucesivos) que se calcula en un tiempo limitado", dice WER a los 13 años, ya que, repitámoslo "siempre hay el tiempo" (ANT).

CAPITULO XIII
UN CASO DE GENERALIZACION CONSTRUCTIVA PROPIA DEL ESTADIO III

con J.F. Bourquin

En otra parte estudiamos el desarrollo que conduce al descubrimiento del centro de gravedad, y si esta cuestión es retomada aquí, no es para volver sobre su contenido. Lo que nos interesa es examinar cómo el sujeto, a quien se le ha pedido poner en equilibrio diversos objetos sobre un soporte cilíndrico de 5 mm de diámetro, y sabiendo que puede comenzar utilizando el borde de la mesa para determinar las líneas de equilibrio (por consiguiente, aquéllas cuya intersección dará el centro de gravedad), va a representarse el número de estas líneas posibles (virtualmente infinito) y la repartición del peso en relación a ellas. Este problema resulta así muy limitado, pero lleva a un ejemplo instructivo de generalización constructiva (modelo del objeto) a partir de observables físicas.

§/1-*EL NIVEL IIIA*.- Solamente fueron interrogados sujetos de 12 a 15 años. Los más jóvenes presentaron reacciones del estadio III con residuos de operaciones "concretas" (estadio II):

CLA (12;6) para una palanca rectangular: "*Hay que encontrar el medio, el punto de equilibrio*". Ella divide en dos el lado grande y traza las dos medianas: "*Aquí donde las dos líneas se juntan es el centro.* -¿Cuántas líneas posibles hay en total en el rectángulo? -(Ella lo coloca según una diagonal sobre el borde de la mesa) -¿Entonces? -*Esto da 4 líneas* (posibles) -¿Es todo? -*Sí, yo creo, no se pueden hacer otras líneas.* ¿Y para encontrar el punto de equilibrio? -*4, no 2. Con una, no va, 2 es lo correcto, con más* (4) *siempre es lo mismo*". Por el contrario, con un disco: "*Dos líneas, no pueden haber cuatro porque no hay rincones. Hay dos principales, pero hay muchísimas otras, pero eso nos lleva a lo mismo.* -¿Es diferente el rectángulo? -*El rectángulo es donde no se puede ir al infinito, no hay más que 4 líneas. Con el disco, se va hasta el infinito*". Con un disco irregular (con 5 protuberancias) ella comienza por creer que el equilibrio es imposible "*porque no se puede hacer más que una sola línea.* -Dibuja. -(Ella dibuja dos ejes perpendiculares. *No, forzosamente hay una mitad.* -¿Pero 4 líneas o 2? -*Es como el rectángulo, habrá 4, no 2, no se pueden hacer más porque eso tendría el equilibrio por dos lados.* -Trata. -(Ella trata sobre el borde de la mesa.) *Da 4*". Rectángulo irregular: "*2 líneas, no se pueden hacer más.* -¿Por qué? -*Es fácil de observar: hay un punto* (protuberancia) *pero no se puede hacer más de 2 líneas porque los puntos no son iguales. Forzosamente no hay más que 2, porque no podemos dividir la figura más que en 2. Allá*

(rectángulo regular) *sólo hay lados iguales* (y no aquí)... *Es necesario que las dos partes tengan el mismo peso.* -(Rectángulo con un ángulo truncado). *-Falta un pedazo de un lado, tomamos un poco del otro, y esto nos lleva a lo mismo.* -¿Por qué ciertas figuras tienen sólo 2 líneas y otras más? *-Porque se pueden hacer más cosas con lados iguales y ángulos iguales*". Disco con peso irregular: "*Ah sí, es más espeso aquí* (un lado)". Ella lo coloca al borde de la mesa girando hasta lograr el equilibrio: "*¡No hay más que una línea! Esto manda al diablo todo lo que dije antes... ¡Es una cosa nada normal!* -¿Podríamos trazar una segunda línea? *-No*". Ella ensaya y descubre que se puede girar el disco sobre el borde de la mesa y que "*eso da cada vez una línea.* -¿Qué tienen ellas de común? *-Todas se atraviesan por el punto medio. ¡Ah! Ahí también* (ella vuelve a tomar todas las formas precedentes, incluyendo los rectángulos). *Sí, señor, hay por todos lados. Hay una infinidad por doquier, porque se puede girar siempre.* -Finalmente, ¿qué es lo que has descubierto? *-Que por todos lados hay líneas al infinito que atraviesan el mismo punto.* -¿Y luego? *-Para encontrar el equilibrio, son necesarias* (y son suficientes) *dos líneas, no forzosamente en el medio* (especial) *de la figura*". Por el contrario, para un volumen espeso (paralelepípedo), ella duda por cuanto a la unicidad del centro de gravedad: "*Si él está aquí, y luego cuando se gira no cambia nada.* -Pero, ¿tú me muestras varios? *-Eso puede tener varios porque tiene un volumen*".

AMB (12;6) *las mismas reacciones. Después de un examen en el borde de la mesa, él concluye que hay "dos líneas para el rectángulo, 4 para el cuadrado y una infinidad para el disco*". Pero en los discos, como en los cuadriláteros, "*siempre hay 4 pesos*" y "*siempre serán iguales pero para las figuras* (irregulares) *tendrán una apariencia irregular*". Para los volúmenes, él prevé 2 centros de gravedad, pero donde cada uno tendrá "*siempre 4 pesos iguales*".

WYS (12;10) prevé lo mismo: 4 partes y 4 pesos iguales para los cuadriláteros que "*estarán exactamente a la misma distancia del centro*", pero para los discos, los pesos "*son sólo puntos. Sin los puntos no habría nada nada.* -¿Cuántas rectas hay? *-Tantas como puntos sobre los bordes del disco*". Para el volumen, WYS generaliza los pesos por partes y por puntos: no hay más que un centro de gravedad "*en no importa qué posición, porque siempre habrá el mismo peso de cada lado y el mismo número de puntos también*".

RIC (13;9) sitúa los pesos de los rectángulos en sus cuatro cuartos, mientras que "sobre el disco es el mismo peso por todos lados" y las líneas de equilibrio pueden estar multiplicadas "*porque no hay lado bien definido*".

SOP (13;2) sitúa el peso del rectángulo "*en los cuatro lados*". Sobre el borde de la mesa: "¿Cuántas líneas hacen falta para encontrar el centro? *-2.* -¿No menos? *-No.* -¿Y en total? *-4.* -Te pregunto por todas las posibilidades que se tienen. *-Entonces 4.* -¿Y con el disco? *-Podría ser infinito.* -¿Por qué? *-Porque hay un número infinito de puntos en el círculo*". Por el contrario, para un disco con puntos asimétricos "*hay 2* (líneas posibles), *yo creo.* -Pero en el otro disco decías que había un infinito. *-Sí, pero el disco tenía por todos lados el mismo peso*".

GAB (14;1) evoluciona como CLA en el transcurso de la interrogación. Al principio, el rectángulo incluye sólo 4 líneas posibles de equilibrio al borde de la mesa "*porque sólo se pueden tomar las 2 diagonales y las 2 líneas que parten del medio de cada uno.* -¿Por qué? *-Pero por qué, no veo, no sé*". -Mientras que para el disco regular "*¡bah! una infinidad*". Por cuanto al disco irregular hay 5 líneas posibles (a causa de las 5 protuberancias): "*...no, aquí yo veo también una infinidad porque es un cacho de disco.* -¿Se-

gura? *-No, pero todos los puntos de cada lado de la figura deberían tener una línea que pasara por el centro*". No obstante, cuando se retoma el rectángulo (truncado de un ángulo), ella no ve "*más que 4 líneas*" (posibles a pesar de haberlo girado varias veces. Finalmente con un rectángulo de pesos asimétricos, ella constata que las diagonales no dan el centro de gravedad sobre el soporte, y concluye entonces: "*Es la misma cosa que con lo redondo. Debe haber ahí muchas* (líneas de equilibrio sobre el borde de la mesa). -¿Cuántas? *-Una infinidad y* (espontáneamente) *¡también en el otro rectángulo!*".

Hemos multiplicado estas citas para que el lector no nos acuse de generalizar a ultranza. Antes de comentarlas, comparándolas con aquéllas del nivel IIB, avoquémonos a señalar el doble salto brusco que conduce de 2, 4 o 5 líneas, para ciertas figuras, a la "infinidad" para el disco, o de 2 y 4 para el rectángulo a la misma infinidad, que finalmente descubren CLA y GAB. Así, en otros dominios, el infinito se impone después de una lenta progresión. Cuando nosotros habíamos preguntado, en otra ocasión con B. Inhelder, a sujetos preoperatorios o del nivel de 7 a 11-12 años, cuántos puntos se podían encontrar entre dos señales (separadas por algunos centímetros), encontramos un lento crecimiento con la edad: 20 o 30, luego 50, 100, 1000, etc. y finalmente sólo "tantos como números haya". Por el contrario, en el presente caso, el sujeto pasa sin transición de 2-5 al infinito.[28] Parece haber aquí el índice de dos modos de razonamiento o de generalizaciones, pero para verificarlo, veamos primero las relaciones del sub-estadio siguiente.

§/2-*EL NIVEL IIIB Y CONCLUSIONES*.- He aquí los ejemplos, que se sitúan todos a la edad de 14-15 años:

BAD (14;10). El centro: "*es el punto que reúne todas las distancias iguales*", queriendo decir que es el medio de todas las líneas posibles. "*¿Cuántas rectas hay?* (él había dibujado 6 sobre el rectángulo). *-Sobre toda la superficie... es infinito*". Figuras irregulares: "*También se encuentran sobre toda la superficie, pero, en todo caso, son necesarias siempre dos para encontrar el punto* (el centro)". Volumen en diferentes posiciones: el centro: "*se va a quedar en el mismo punto porque la figura no va a cambiar de forma ni de volumen*".

CRE (14;8). Los pesos del rectángulo: "*Hay por todos lados*".

DEC (15;6). Líneas del rectángulo: "*Una aquí o aquí* (al azar, sin comenzar por las diagonales), *en fin, eso da una infinidad.*"

MIL (15;6) comienza por las diagonales. "¿Cuántas rectas posibles hay? *-Una infinidad*". Rectángulo de pesos descentrados: "*Si hay más peso de un lado, el centro no será la intersección de las diagonales*".

---

[28] Ciertamente el disco por sí solo daría en los estadios anteriores una evolución progresiva, lo que no disminuye el interés del contraste entre los cuadriláteros y los círculos en los sujetos de 12-13 años.

PEN (16;6) dice, del peso de los rectángulos, que "*hay uno solo... pongamos dos, un entero*", y siempre dos mitades de los lados opuestos del centro de gravedad.

Lo propio de estas reacciones no imaginar ya ninguna oposición entre los cuadriláteros y las figuras circulares por cuanto al número de líneas de equilibrio posible sobre el borde de la mesa, ni en relación a la repartición del peso. Entonces, la cuestión es comprender porqué esta reacción, aparentemente tan natural, es de hecho tan tardía y porqué los sujetos del nivel IIIA, de 12-13 años, se aferran con tal obstinación, como hemos visto, a la idea de una diferencia muy notable entre 2 y 4 ó 5, o una infinidad de líneas, o de pesos masificados por paquetes en función de los ángulos de los cuadriláteros o repartidos "por todos lados" (RIC y SOP) y sobre todos los "puntos" (WYS) de las figuras circulares.

Los sujetos del nivel IIIB no nos indican las razones que ellos tienen para atribuir una infinidad de líneas posibles a los cuadriláteros, porque para ellos es evidente, sin decirlo, e incluso sin tener que pensarlo, que se puede girar en todos los sentidos y así encontrar todos los cortes imaginables que pasan por el centro. Por el contrario, los casos de CLA y de GAB nos enseñan con precisión cómo el sujeto ha pasado de 1-4 al infinito. En el caso de CLA se lleva a cabo girando un disco irregular sobre el borde de la mesa y es cuando el sujeto descubre la posibilidad de hacer lo mismo con todas las figuras: "Sí, señor (sin pregunta de éste)... se puede girar siempre", de donde "por todos lados hay líneas al infinito", comprendiendo a los rectángulos. Lo que el sujeto generaliza es su operación de girar y no las propiedades figurales del objeto, quienes, bien entendido, deben someterse a la acción, aunque no sean la fuente. En el caso de GAB, es el hecho recíproco de que una propiedad figural (las diagonales del rectángulo) no se aplica a un rectángulo de pesos irregulares lo que lo lleva a esta afirmación sorprendente: "es la misma cosa que con lo redondo... una infinidad". Dicho de otra manera, será suficiente girar este rectángulo para que con este hecho, se vuelva asimilable a un círculo, ya que (y esto resulta evidente para GAB aunque no lo diga) lo propio de lo redondo es precisamente, o bien girar, o bien incluir una infinidad de diámetros indiscernibles progresivamente, por lo que el sujeto estará entonces constreñido a imprimir una rotación, bajo su propia observación, sobre el perímetro del objeto por analizar.

Así, se comprende porqué la dualidad de estructuras de los cuadriláteros y de las figuras circulares conducen a los sujetos del nivel IIIA a dos formas tan diferentes de generalizaciones apoyándose, sea sobre los observables espaciales del objeto, o sobre la geometría

del sujeto en tanto que sistema de acciones y de operaciones. El cuadrilátero no es una figura que sugiere la rotación y, para poder ver una infinidad de pasajes posibles según las posiciones obtenidas al girar, hay que colocarse de entrada en la perspectiva de las operaciones del sujeto, como es el caso en el sub-estadio IIIB, aunque se trate de un problema de física con necesidad de controles experimentales. En el nivel IIIA, al contrario, el sujeto busca en el objeto sus características espaciales específicas, de aquí el papel que ejercen los lados y los ángulos, que sugieren 4 líneas privilegiadas si se mantienen los datos objetivos en tanto que figurativos, mientras que el círculo, no teniendo limitaciones, implica una infinidad de diámetros posibles. Apoyándose únicamente en las observables, el sujeto razona entonces a través de generalizaciones inductivas y locales, es decir, por categorías de objetos, como si las operaciones realizables no sobrepasaran las fronteras de sus propiedades exteriores. En lo que concierne a los pesos, son igualmente concebidos como distribuidos en función de sus propiedades figurales objetivas. Por el contrario, desde que domina la geometría del sujeto, sea a propósito de los rectángulos, sea favorizada más rápidamente en el caso de los círculos (y hemos visto porqué), la generalización se vuelve constructiva, y lo es incluso a un grado tal, que ella engendra este nuevo contenido que es la “infinidad”, radicalmente inobservable sobre los objetos en tanto tales, es decir, cuando son observados perceptivamente.

Hemos creído útil terminar la exposición de los hechos reunidos en esta obra, con este breve análisis de una situación, a la vez sumamente espectacular y para muchos paradigmática, donde los sujetos de un nivel ordinariamente caracterizado por sus poderes hipotético-deductivos (y que son utilizados en lo concerniente a los círculos) presentan dos tipos de generalizaciones, en este caso notablemente diferentes, según que el punto de vista adoptado para interpretar los fenómenos físicos sea el de la geometría figurativa y estática del objeto, o el de la geometría operativa del sujeto. Este último no olvida, naturalmente, el objeto, pero para comprenderlo lo sumerge en el mundo de las transformaciones posibles sin tomar en cuenta las observables. Esta ampliación fundamental del sector considerado, conduce a la generalización constructiva a cumplir el doble papel que constantemente le hemos reconocido: el de elaborar no solamente formas nuevas (lógico-matemáticas o atribuidas a los objetos de manera casual), sino contenidos no dados desde el principio y engendrados por estas formas, y esto, incluso sobre el terreno físico, sin limitarse a los dominios exclusivamente deductivos.

CAPITULO XIV
CONCLUSIONES GENERALES

Los hechos descritos en esta obra conducen a un cierto número de constataciones de conjunto, en donde unas son banales, como la existencia de dos grandes tipos de generalizaciones, pero otras lo son menos, comenzando por la posibilidad de reencontrar en el desarrollo de los razonamientos en el niño, la mayor parte de los problemas que suscita la epistemología de las ciencias.

§/1-*LA GENERALIZACION INDUCTIVA*.- Si partimos de las inducciones, cada uno sabe que ciertos autores ya no quieren hablar de ello, como si ellas carecieran de toda significación; otros sólo ven una forma de razonamiento opuesta a la deducción, aunque bien sólo sea un método de conjunto para procedimientos deductivos apoyados, por otro lado, en sistemas de cuantificación probabilística; y finalmente, los terceros que buscan siempre un tipo particular de inferencia fundada en la analogía, siempre reconociendo que la deducción matemática conduce de lo menos a lo más general, pero de un modo necesario (la inducción "completa" de Poincaré) y ya no probabilístico. Por nuestra parte, hemos hablado de "generalización inductiva", colocándonos bajo el punto de vista, no de cuestiones de la lógica que no han sido abordadas en este trabajo, sino de las fronteras epistemológicas entre lo que proviene de los objetos y lo que es proporcionado por las operaciones o acciones del sujeto.

Así, bajo tal perspectiva, el estudio de la psicogénesis parece imponer la existencia de generalizaciones extensionales fundadas únicamente en los observables. Cuando los jóvenes sujetos del capítulo V ven que los ángulos de un cuadrilátero suman 360º concluyen que sucederá lo mismo con el pentágono, etc., pero con "redondos" cada vez más grandes; y cuando los del capítulo IX constatan que una lámina empujada sobre un rodillo se adelanta sin cesar a éste, inducen que siempre sucederá lo mismo: que estas inferencias sean falsas o correctas, ellas se limitan a generalizar, de "algunos" a "todos", los hechos o relaciones constatadas, es decir, las observables a título de

contenidos de estas constataciones. Ciertamente, y constantemente lo hemos repetido,[29] el registro de estos contenidos supone una asimilación, por consiguiente, de formas consistentes en clases, relaciones o números, etc., y estas formas resultan de abstracciones reflejantes y de generalizaciones constructivas, pero anteriores al razonamiento actual, que juegan un papel de cuadro asimilador. Dicho de otra manera, ellas se abocan a "permitir" la asimilación de los contenidos, pero sin "engendrarlos" frecuentemente se agregan ideas preconcebidas que falsean la lectura de las observables, pero debidas en este caso a inducciones anteriores de otros contenidos. Dado esto, y una vez registradas las observables sobre los objetos dados, la generalización consiste en transferir este contenido a objetos nuevos, sin que el cuadro asimilador produzca el contenido mismo de esta generalización. Entonces, el pasaje de "alguno" a "todos" en una generalización lógico-matemática es otro, en donde las formas actualmente construidas crean nuevos contenidos (iteración recurrencial, etc.), mientras que los contenidos de las generalizaciones inductivas son proporcionados por las observables adjuntas a los objetos: el firmante de estas líneas ha consagrado años al estudio de los moluscos, pero las generalizaciones que ha podido hacer sobre las observables así analizadas jamás lo han conducido a engendrar el más pequeño caracol, mientras que sus colegas matemáticos tienen la suerte de crear formas y contenidos sin tener que dejar su mesa de trabajo. En una palabra, si uno se atiene únicamente a las observables constatadas sobre los objetos, existen generalizaciones posibles, pero llevando contenidos, ellas serán sólo extensionales y, en este sentido, inductivas.

§/2-*LA NATURALEZA DE LA GENERALIZACION CONSTRUCTIVA*.- En una brillante exposición en nuestro symposio final G. Henriques comenzó por preguntarse qué significaba el predicado "generalidad" en el caso de las generalizaciones constructivas: en efecto, su carácter específico de "construcción" puede conducir a la elaboración de estructuras más ricas, pero de extensión más limitada (por ejemplo, los cuerpos en relación a los anillos, ya que todos los cuerpos son también anillos, sin que lo recíproco sea verdadero), y sería una paradoja hablar en este caso de ¡"generalización especializante"!

Por consiguiente, es claro que la cuestión de la generalidad no puede colocarse, desde el punto de vista constructivista, en términos de presencia o ausencia de un cierto predicado: es todo el sistema de

---

[29] Ver, entre otras, las conclusiones del capítulo IV.

relaciones lo que es más o menos general. En otros términos, la generalización constructiva no consiste en asimilar los contenidos nuevos a formas ya constituidas, sino en engendrar nuevas formas y nuevos contenidos, es decir, nuevas organizaciones estructurales. La asimilación en juego, en tales procesos, no es nunca una asimilación simple (es decir, de esquemas pre-existentes), sino, una asimilación recíproca de esquemas primero concebidos como heterogéneos (cf. el capítulo XII sobre la generalización de la idea de velocidad), una asimilación con diferenciaciones y reintegraciones: en este caso el punto de partida para el sujeto es la dificultad de una asimilación particular (por ejemplo $n - m$ si $m \gg n$ siendo el esquema inicial el de los enteros positivos, o, en el capítulo VII, la constancia de la longitud cuando ella es medida en vertical o en horizontal). Por el contrario, en términos de llegada, lo que era perturbación u obstáculo para la asimilación, se convierte en una transformación interna del esquema ampliado, pero con diferenciación del esquema inicial en sub-sistemas (según que se tenga $n \gg m$ o $m \gg n$ o que las rectas por medir tengan diversas direcciones), y con una integración de éstos en un sistema total que los coordine —grupo aditivo de enteros positivos y negativos, o isotropía del espacio euclidiano). Por consiguiente, siempre ha habido asimilación, pero de un rango superior.

La generalidad que caracteriza las generalizaciones constructivas no puede permanecer puramente extensional, como en el caso de inductivas donde simplemente hay asimilación de nuevos contenidos observables en un esquema preexistente, que por consiguiente, no se ve modificado, sino que debe estar definida por la riqueza mayor (o fuerza, que es sinónimo) de los sistemas que ella elabora. Entonces, este incremento puede medirse en extensión, lo que es evidente en el caso de asimilaciones recíprocas entre esquemas del mismo rango, ya que la idea general tendrá en este caso un contenido más amplio que el de cada sub-sistema. Pero sobre todo, se manifiesta en comprensión, en los casos de diferenciaciones y reintegraciones, ya que las estructuras del rango superior presentarán, entonces, propiedades nuevas. Así, nos encontramos en presencia de un grave problema lógico: el enriquecimiento debido a las generalizaciones constructivas no se presenta nunca, como lo hemos visto sin cesar, únicamente en comprensión o en extensión, sino con exclusión de la otra dimensión, ya que los dos van siempre pares. De esta forma, es una ley bien establecida, según la cual la extensión (que se mide en las inclusiones) y la comprensión (dada por las implicaciones) son en razón inversa la una de la otra. En efecto:

A⊂B solamente si ∀ $x(x{\in}A){\supset}(x{\in}B)$.

Pero la recíproca de este enunciado, es decir, la implicación que conlleva una inclusión, no es verdadera más que bajo ciertas condiciones y, si uno quiere utilizar la implicación como índice de la "comprensión", se vuelve a encontrar las mismas condiciones: es que las implicaciones en juego deben ellas mismas ser interpretadas en comprensión (implicaciones significantes: $p{\supset}q$ si q forma parte de la significación de p) y no solamente en extensión (tablas de verdad: la clase de valores verdaderos de p corresponde a una parte de la clase de verdades de q). Así, estas implicaciones significantes presentan, además, dos tipos de ventajas: por una parte, son bastante más precoces desde el punto de vista de la psicogenética que las implicaciones en extensión (ver el capítulo V del volumen sobre la *Abstracción*), y por la otra, ellas no incluyen implicaciones paradójicas.

Dicho esto, sólo queda que la conexión de q a la significación de p pueda hacerse de dos maneras, recordando la célebre distinción de Frege entre la "significación" (Sinn) y la "denotación" (Bedeutung), y esta diferencia será importante a continuación en lo que concierne a las variaciones intrínsecas y extrínsecas. Por una parte, una clase como la de los triángulos euclidianos implica necesariamente subclases de triángulos: escalenos, isósceles y equiláteros, porque, ya que los triángulos poseen tres lados, entra dentro de su "significación" presentar necesariamente longitudes que son desiguales o iguales: 2 a 2, o 3 a 3. Por el contrario, la clase de las mesas (de jardín, etc.) pueden englobar sub-clases según sean en madera, fierro, piedra, etc.: no obstante, estas características deben estar vinculadas a la "comprensión" de las sub-clases, pero a título de "denotación", es decir, en referencia a las propiedades de los objetos designados. En el caso de los sistemas taxonómicos (pero insistiendo sobre el hecho de que no se trata aquí más que de clasificaciones fundadas en las observables, y no de operaciones que podrá, y pone ya en juego la biología causal), la presencia de glándulas mamarias dentro de una clase de los vertebrados proviene igualmente de su "denotación", por lo que no habrá nada de contradictorio si se descubre un día que los cefalópodos presentan tales glándulas (lo mismo que poseen ojos de vertebrados), o que se encuentran mutaciones en los ratones que las hayan perdido, aunque conservan las otras características de los roedores.

§/3-*LAS RELACIONES ENTRE LA COMPRENSION Y LA EXTENSION*.- Cada uno de nuestros capítulos nos ha demostrado que la generalización constructiva desemboca, simultáneamente o después de una corta diferencia, en un enriquecimiento complementario de la extensión y de la comprensión, como si ellas crecieran en razón directa y no inversa la una de la otra. Hay pues una contradicción aparente con lo que acabamos de ver. Para levantarla, conviene entonces distinguir las formas o estructuras y los contenidos, las primeras incluyen naturalmente propiedades de comprensión (que llamaremos Cf) pero también de extensión (que llamaremos Ef: por ejemplo, existen menos grupos que monoides, ya

que los primeros están incluidos en los segundos). Por cuanto a los contenidos, tienen igualmente características de comprensión (Cc) distintas de Cf (por ejemplo, ser un número entero) y de extensión (Ec). Así, vamos a demostrar que comparando Cf y Ef, así como Cc y Ec, encontramos claramente una relación inversa en las extensiones y las comprensiones, pero si comparamos Cf y Ec, siendo Cf la riqueza en la comprensión de las estructuras de conjuntos elaborados por generalizaciones constructivas, y Ec el incremento de los contenidos engendrados por estas formas o por las operaciones que las caracterizan, por el contrario, estaremos frente a relaciones directas.

Por lo que toca a las relaciones inversas, podemos citar dos ejemplos en el dominio del pensamiento científico: el del número y el de la taxonomía biológica. Los números pueden estar clasificados en naturales N, enteros Z, racionales Q, y de extensiones crecientes, cuando se tiene $N \subset Z$, $Z \subset Q$, etc., y de comprensión decresciente cuando $\forall x (x \in N) \supset (x \in Z)$, etc. Pero estos conjuntos de números presentan estructuras en que las operaciones constitutivas corresponden a las que han engendrado estas extensiones (generalización de la sustracción por las N, etc.): los naturales N tienen también por forma un monoide, los enteros un anillo, etc. De esta forma, los anillos son más ricos en comprensión que los monoides, pero más pobres en extensión, encontrando así una relación inversa.

En cuanto a las operaciones de clasificación (agrupamientos) que constituyen la taxonomía zoológica tradicional (pero repitámoslo, sin ocuparnos de las relaciones causales subyacentes en la biología teórica) podemos entonces distinguir formas bien definidas (uniones E, clases K, órdenes O, familias F, géneros G, y especies S) y contenidos (los conjuntos de animales). Por lo que toca a las formas, volvemos a encontrar la relación inversa comprensión-extensión. En efecto, la definición de comprensión de una unión E es estar subdividida en clases K, que incluyen las órdenes O, etc., hasta las especies[30], es decir, n tipos; mientras que la definición en comprensión de una clase K o de un orden O significa incluir $n - 1$, o $n - 2$ de estos tipos de jerárquicos (dirección $\downarrow$ o $\uparrow$). Por cuanto a las extensiones, existen menos uniones E que clases K, menos clases K que órdenes O, según la dimensión ya que la clasificación tiene la forma de una pirámide. Por cuanto a los contenidos, es evidente que tenemos la misma relación inversa: pescados $\subset$ vertebrados y $(x \in \text{pescados}) \supset (x \in \text{vertebrados})$.

Pero si estos dos ejemplos de números y de una clasificación no cuantitativa (a diferencia de la tabla de Mendeleiev en química) verifican la relación inversa de la comprensión y de la extensión a

[30] Si se descubriera una nueva especie S de vertebrados E que no se incluye ni dentro de los pescados, ni dentro de los batracios, etc., se debería construir, para esta única especie S, una nueva clase K, del mismo rango que la de los pescados, etc., un nuevo orden O, una nueva familia F y un nuevo género G, de manera que sea posible reunir la especie con la unión E que sería la suya, pero pasando por todos los intermediarios jerárquicos E, K, O, F, G, S. Por consiguiente, en este caso, E no podría contener más que una sola clase K, ésta un solo orden O, éste una sola familia F, un solo género G y la sola especie S, pudiendo sólo ser conocida gracias a un solo individuo (por ejemplo, paleontológico, pero bien conservado o por un sondeo excepcional en zonas abisales).

condición de distinguir las formas y los contenidos, es importante recalcar, desde el punto de vista de la oposición entre las generalizaciones inductiva y constructiva, cuán distintas son, en estos dos casos, las relaciones entre las formas y los contenidos: en efecto, por lo que toca a los números, estos contenidos son engendrados por las operaciones del sujeto, lo mismo que las formas o estructuras (incluso cuando han sido descubiertas posteriormente por abstracciones reflexionadas, lo que no les impedía actuar antes), mientras que en el caso de la taxonomía, los contenidos están dados en la realidad exterior y son explorados por generalizaciones inductivas, estando las formas construidas por el clasificador, pero siempre con la exigencia de amoldarse adecuadamente a los contenidos previos.

Entonces, resulta que las "formas" de la taxonomía se distinguen por el número de sus subdivisiones y no por sus características estructurales especializadas, como aquéllas que oponen un grupo a un monoide, etc. En efecto, una unión E es una reunión de clases K, como un género G es una reunión de especies S, pero nada impediría desplazar la jerarquía de un rango, de hacer de cada clase K una unión E, o de una especie S un género G, etc., ni de multiplicar los grados intermedios (sub-uniones, sub-clases entre las clases K y los órdenes O), etc., y los taxonomistas no dejan de hacerlo. En consecuencia, si una estructura es un grupo, es por ello mismo un monoide, además del nombramiento de una operación); por el contrario, podríamos decir que si un ajuste es una unión, por ello mismo es una clase K, además de su agregado operatorio de carácter general. La razón evidente de esta diferencia fundamental es que si una clase K forma parte de una unión E, los caracteres distintivos de K (por ejemplo las glándulas de los mamíferos) no entran dentro de la significación necesaria de aquellos de E (por ejemplo los vertebrados). Por el contrario, los caracteres de un monoide (asociación y elemento neutro) forman parte igualmente de los de un grupo (a quien agregan solamente la operación inversa). De donde cuerpos $\supset$ anillos, y no K $\supset$ E en lo que se refiere a la comprensión de las formas.

Estas afirmaciones varias nos permiten comprender porqué, dentro de los múltiples ejemplos de generalizaciones constructivas que hemos podido estudiar, existe un enriquecimiento simultáneo de la extensión y la comprensión: si como hemos convenido llamamos Cf a la comprensión de contenidos, y Ef a su extensión, las relaciones Cf $\leftrightarrow$ Ef y Cc $\leftrightarrow$ Ec dan respectivamente una relación inversa entre estas extensiones y estas comprensiones, pero, comparando la comprensión Cf de las formas, y la extensión Ec de los contenidos, hay, por el contrario, cuando estos contenidos son

engendrados, como las formas por las operaciones del sujeto (ver los capítulos II-V), una relación directa entre los dos: y es precisamente esta doble constructividad lo que constituye, sin duda, el carácter esencial de la generalización constructiva, y cuando parecen haber excepciones, ellas pueden eliminarse tan pronto se introduce la distinción de diferenciaciones por variaciones intrínsecas y extrínsecas (ver IV).

Por otro lado hay que hacer notar que, sobre el terreno del pensamiento científico, estas interpretaciones positivas entre el incremento de la comprensión de las formas y el de los contenidos pueden conducir a situaciones aparentemente paradójicas, sobre las cuales Henriques ha insistido, al comparar Cc con Ec y Ec con Ef: por ejemplo, en comprensión (x es un entero Z) $\supset$ (x es un racional Q), pero (x es un cuerpo) (x es un anillo), y en extensión (enteros $\subset$ racionales) pero (conjuntos de cuerpos conjunto de anillos).

Dicho de otra manera, mientras que el conjunto de números considerados se incrementa en extensión pasando de los enteros Z a los racionales Q, la comprensión de su forma o estructura se enriquece pasando del anillo al cuerpo. Del mismo modo, el pasaje de los naturales N a los enteros Z acompaña este incremento de extensión con un enriquecimiento de forma sustituyendo el grupo o anillo al monoide, etc. Y si se dice que no hay relación entre estas estructuras (cuerpos, etc.) y estos conjuntos (Q, etc.) que nosotros llamamos "formas" y "contenidos", son las operaciones mismas de sustracción generalizada las que dan cuenta a la vez del doble progreso N→Z y monoide grupo y de la división generalizada que interviene dentro de los procesos Z→Q y anillo→cuerpo, a pesar del gran desfase histórico entre las transformaciones de los contenidos y las de las formas o estructuras. En principio, Henriques también ha recurrido, para explicar esta paradoja, a un proceso de construcción genética. Nos encontramos en tales casos en presencia de dos niveles jerárquicos: el inferior que corresponde a los contenidos, y sobre el cual habrá "extensión creciente" de ellos, y luego, el superior que conduce a la elaboración de la forma con enriquecimiento de su "comprensión". En otros términos, en cada nivel encontramos relaciones inversas entre la comprensión y la extensión, siendo necesarias por la relación X $\subset$ Y si x $\subset$ y, pero comparando los dos niveles (la tematización del nivel superior siendo más tardía), el incremento en extensión del primero conlleva un enriquecimiento de la comprensión del segundo.

A pesar de lo clarificante que es la introducción de esta dimensión genética por un matemático[31], y de lo evidente que es el desfase histórico, en este caso particular, entre el incremento de los contenidos, de Z a Q, y la elaboración de formas o estructuras cada vez más ricas, resulta que la construcción genético-histórica se traduce en la construcción de nuevas operaciones: por consiguiente, se trata de caracterizarlas epistemológicamente para alcanzar el mecanismo de la generalización en términos de diferenciaciones e integraciones. En efecto, se podría considerar la génesis como una fuente, en cierta forma, infraccional (o transracional) de creaciones intuitivas, en donde los poderes serían suficientes para explicar los crecimientos paradójicos Cf o Ef $\rightleftarrows$ Ec señalados hace un momento, y las interacciones positivas o dobles enriquecimientos en Cf o Ec en el caso de números N, Z y Q. Para empezar, frecuentemente no existe ningún desfase histórico entre los incrementos correlativos de la extensión y de la comprensión: cuando Cantor introdujo el proceso de correspondencia

[31] Henriques vuelve sobre estos problemas en su capítulo XV.

1 a 1 simultáneamente enriqueció la "extensión" de los números con el agregado de los transfinitos, y su "compresión" con un álgebra nueva que es la de los conjuntos. De manera general, igualmente se puede decir que en todo dominio matemático la introducción del infinito engendra una doble explosión tanto en comprensión como en extensión.

De hecho, dos condiciones parecen ser suficientes para explicar este enriquecimiento correlativo de estructuras o formas, y de contenidos. 1) Una nueva operación engendró contenidos que no existían todavía, o fue aplicada a contenidos que no la incluían: por ejemplo, la sustracción n — m (si m » n) dando origen a los números negativos, la división que da origen a los racionales, la raíz $\sqrt{-n}$ a los números imaginarios, etc. 2) Es la misma operación, o su tematización después de la abstracción reflejada, que permite construir la estructura correspondiente: lo inverso de la adición para pasar del monoide de los N al grupo adicional de los Z, etc. Por el contrario, en el caso de los agrupamientos, no son, las operaciones de clasificación lo que engendra los contenidos por clasificar ya que se trata de objetos dados por el exterior cuyas propiedades en comprensión no son conocidas sino a través de la abstracción empírica.

§/4-*LAS DIFERENCIACIONES O VARIACIONES EXTRINSECAS E INTRINSECAS*.- En la medida en que se construye lo nuevo a partir de lo conocido (y no reencontrando lo conocido en objetos nuevos, como los pasos inductivos), la generalización constructiva procede naturalmente a través de diferenciaciones e integraciones, ya que las novedades no se superponen simplemente a quien las precede, sino que se derivan en parte. Por lo que concierne a las diferenciaciones, estudiadas en númerosos capítulos (VI-VIII etc.), hemos constatado en varias ocasiones que ellas consisten, no solamente en abstracciones, sino que exigen generalizaciones, ya sea para enlazar entre ellas las variaciones de los factores por diferenciar (ver capítulo VIII), como para abrir nuevas posibilidades.

Pero si las generalizaciones constructivas implican continuas diferenciaciones ya sea espontáneas o debidas a abstracciones seudoempíricas, (constataciones del resultado de las operaciones), también existen en el seno de las generalizaciones inductivas, salvo que sean impuestas por los objetos exteriores y no por los endógenos. Por consiguiente, hay aquí una nueva oposición fundamental entre las dos formas de generalización, según sean diferenciaciones exógenas debidas a nuevas observables no previstas, o por el contrario, estén ligadas a transformaciones internas del sistema. Es importante analizar estos dos tipos de variaciones, de quienes hemos visto ejemplos en los capítulos I, VII, VIII, etc.

Anotemos, en principio, que el problema de la extensión y de la comprensión, discutido en el capítulo III, tiene su origen cuando en lugar de considerar a título de comprensión los caracteres en juego dentro de la definición (estática) de la clase analizada, introducimos el conjunto de variaciones, que incluye (por implicación significan-

te) su significado. Como ya se dijo, se debe admitir que las propiedades de los triángulos euclidianos implican las transformaciones posibles de las longitudes de sus lados, siendo necesariamente iguales o desiguales, lo mismo que el tamaño de los ángulos: en este caso, la compresión y la extensión de los triángulos euclidianos cualesquiera serían superiores a las de las sub-clases, ya que un triángulo isósceles, por ejemplo, sólo puede variar en condiciones más restringidas. Por el contrario, en una clasificación, y si uno se limita a las implicaciones significantes y a las "significaciones" en oposición a las "denotaciones", una sub-clase A de carácter distintivo *a*, comparada con la clase que la envuelve B, de carácter general *b*, presenta una extensión inferior a la de B (ya que A $\subset$ B), pero una comprensión superior ya que ella beneficia las variaciones posibles de *a* y de *b*, mientras que B no conoce más que las de *b* excluyendo a *a*, si *a* no es deducible de *b*.

Pero lo que nos interesa ahora solamente es el problema de las diferenciaciones. Distinguiremos dos tipos a título de variaciones de una propiedad considerada (un carácter de la comprensión): las diferenciaciones o variaciones "intrínsecas", que pueden estar determinadas por deducciones necesarias a partir del significado de esta propiedad, y las diferenciaciones o variaciones "extrínsecas" producidas desde fuera por consideraciones de hecho (constataciones y abstracciones empíricas). Las variaciones de longitud y de igualdad o desigualdad de los lados de un triángulo euclidiano son intrínsecas, porque un lado sin longitud es una noción contradictoria, y dos longitudes son necesariamente iguales o desiguales. Por el contrario, que las montañas tengan 1,000 o 2,000 o 3,000 metros de altura es asunto de variaciones extrínsecas, ya que, incluso enumerando todas las causas posibles de erosión, no existen sino constataciones y denotaciones. Por la misma razón, la posibilidad para un vertebrado de tener o no glándulas mamarias, además de su columna vertebral, continúa siendo una diferenciación extrínseca, en tanto que no se conocen las razones bioquímicas que puedan permitir una alianza deductiva que una estos dos caracteres.

Dicho esto, consideramos por definición que una clase está, más fuertemente estructurada que sus subclases, las cuales están unidas al todo y entre ellas por variaciones intrínsecas. Por ejemplo, un grupo y sus sub-grupos constituyen una clase fuertemente estructurada, mientras que un género y sus especies se mantienen en general débilmente estructuradas debido a deducciones de "diferencias específicas". Pero todos los intermediarios son posibles entre estas dos formas de clases, y una seriación A « B « C..., por ejemplo, pueden dar lugar a todos los grados de estructuración a partir de una rela-

ción cualquiera sin regularidad en las diferencias, hasta componer leyes de series cada vez más complejas. Por un lado, es claro que siempre se puede concebir una variación extrínseca como relevante de un estado provisional esperando que las informaciones más avanzadas la transformen en diferenciación intrínseca; por lo mismo se puede suponer que una implicación paradójica, tal como la célebre condición "si el vinagre es ácido, entonces existen barbudos" podría ser promovida como rango de implicación significante mediante un cierto número (¡pero bastante elevado!) de conocimientos suplementarios sobre las interacciones del universo. Así, este pasaje posible de lo extrínseco mal estructurado a lo intrínseco fuertemente estructurado, lejos de complicar nuestras hipótesis nos encamina, por el contrario, hacia el enunciado de una ley psicogenética posiblemente importante, y según la cual toda generalización intentaría orientarse en la dirección de las diferenciaciones intrínsecas.

Si es así, y de manera general se busca como lo hemos sugerido, subordinar las propiedades estáticas de "comprensión" a un sistema de variaciones intrínsecas que ellas podrían incluir, existe una diferencia de grados entre las formas operatorias que engendran sus contenidos (tales como la iteración $n+1$ por la continuación de números naturales, la sustracción por los enteros negativos, etc.) y las que, sin crearlos propiamente hablando, los "reengendran" como es el caso de la reconstrucción deductiva de seres geométricos a partir de "grupos" fundamentales invocados por F. Klein: en las dos situaciones hay construcción, total o parcial, del contenido por la forma, y es porque el plan de variaciones intrínsecas, el enriquecimiento de la comprensión en tanto que sistema de variaciones deductivamente posibles, se acompaña de un incremento correlativo de la extensión en tanto que conjunto de contenidos. Por el contrario, en el plano de variaciones extrínsecas los contenidos son hechos que se reencuentran o asimilan por las formas construidas bajo su intención, y no engendradas por ellas, y sólo esperan las reconstrucciones eventuales que vendrán un día... o nunca.

Finalmente sobra señalar el parentesco entre las diferenciaciones intrínsecas y la abstracción reflejante, así como entre las variaciones extrínsecas y la abstracción empírica.

§/5-*DIVERSAS FORMAS DE INTEGRACION*.- Si toda diferenciación implica una parte de generalización en la medida en que se trata de comparar las variaciones, y no solamente los estados en los cuales ellas desembocan, toda integración implica igualmente una generalización, porque incluso cuando ella conduce a estructuras complejas en donde el número de modelos es restringido, y en donde

puede entonces aparecer como "especializante", las estructuras están integradas en sistemas de conjunto cuyas leyes dan cuenta de especializaciones. Por ejemplo, desde el nivel sensomotor, cuando dos esquemas se integran por asimilación recíproca, como la presión y la visión, los objetos a la vez visibles y asequibles se oponen entonces a los objetos visibles e inasequibles (como la luna) y recíprocamente (si hay pantalla manipulable); el caso especial resulta cuando las dos cualidades positivas están reunidas volviéndose solidarias de las generalizaciones por cuanto a las distancias, a los desplazamientos, etc. Del mismo modo, a todos los niveles, la integración en sistemas de conjunto implica generalizaciones, sean ellas constructivas o incluso inductivas.

Pero es evidente que, según el carácter extrínseco o intrínseco de las diferenciaciones a las cuales responden las integraciones, éstas serán de tipos bien distintos, sin excluir los intermediarios, desembocando así en clases o sistemas más o menos fuertemente estructurados. Introduciremos dos dicotomías en el seno de las integraciones, lo que las llevará a tres tipos principales: las integraciones *totalizantes*, o aquellas que permanecen solamente como *coordinadoras* y, entre las primeras, las totalizantes *completivas* y las totalizantes simples o *sintetizantes*.

La primera de estas distinciones reposa sin más sobre las variaciones intrínsecas y extrínsecas: una integración totalizante desemboca por definición en un sistema total en donde las propiedades, en tanto que sistema, son otras diferentes a las del sub-sistema que reúne, ya sea que estas últimas resulten de variaciones intrínsecas del sistema total, sea que este último agregue a las estructuras de las que procede ciertas características nuevas que las enriquecen (las estructuras precedentes sólo pueden ser consideradas como sub-sistemas en la medida en que están integradas o "sumergidas" en las más fuertes, como es el caso en las relaciones entre un monoide y un grupo). Las integraciones coordinadoras, al contrario, sólo surgen de variaciones extrínsecas y, en consecuencia, consisten sólo en reunir los sub-sistemas en una totalidad que no agrega nada a sus propiedades y no incluye más que caracteres comunes más pobres que los de las sub-clases, salvo por el hecho de que el todo admite más subdivisiones que los peldaños inferiores.

Como ejemplo ilustrativo de esta primera distinción, podemos citar primero los resultados obtenidos con los "reflejos" (capítulo VIII), que además, muestran el pasaje psicogenético posible de un modo de integración a otro. En tanto que los sujetos no hayan comprendido el mecanismo de las superposiciones e interferencias, ellos se limitarán a clasificar los objetos observados como variaciones ex-

trínsecas: figuras estáticas (cuadrados o rombos) o movimientos (diferentes direcciones), etc. Entonces, existen sólo integraciones coordinadoras más o menos avanzadas. Por el contrario, con la comprensión de las razones, las variaciones se vuelven deducibles, luego entonces, intrínsecas, y el sistema de conjunto, alcanzado en el estadio III, se convierte en muestra de la integración totalizante.

En el plano científico, un grupo y sus sub-grupos constituyen una integración totalizante, debido a que se pueden deducir de las variaciones intrínsecas posibles de ésta. Por el contrario, la taxonomía zoológica es un ejemplo típico de integración coordinadora, ya que de las propiedades comunes que caracterizan a una Unión no se pueden deducir las propiedades de las clases, ni las de los Ordenes, ni *a fortiori* las de las Familias, Géneros o Especies. La única marca distintiva de estos encajonamientos es la de conformar en lo posible sub-divisiones, pero ninguna de éstas posee una estructura *sui generis* (a pesar de los ensayos múltiples concernientes a las de la Especie); de hecho, el Género es una Especie ampliada, la Familia un Género ampliado, etc., cada uno incluyendo cada vez menos caracteres comunes, y cada vez más subdivisiones, pero que pueden ser modificadas (lo que sucede frecuentemente). Evidentemente la razón es que el sistema en juego no se da más que en las variaciones extrínsecas que esperan que la bioquímica las transforme en intrínsecas.

Regresando a las integraciones totalizantes, se impone otra dicotomía: podemos llamar completivas a las generalizaciones que integran una estructura más pobre en una estructura más rica, lo que viene a constituir ésta por el agregado de operaciones nuevas; por ejemplo, las que describe el capítulo I en el pasaje de grupos de clases separadas al "conjunto de las partes". Además hablaremos de totalizaciones simples o de integraciones "sintetizantes" en los casos en que se trata de despejar la estructura o el concepto comunes a diversas estructuras o nociones anteriormente concebidas como heterógenas: por ejemplo, las deducciones del capítulo XII que tienden a generalizar la idea de velocidad.

Es interesante comparar el sistema de investigaciones completivas con el de las integraciones coordinadoras. En el caso de las clasificaciones, si seguimos el orden de las inclusiones podemos partir de una especie A encajada en un género B (por lo que $A \subset B$), pero el género contiene normalmente otras especies A'. B está incluido en la familia C, la cual comprende otros géneros B'. Por lo mismo, la familia C forma parte de un orden D que comprende otras familias, de donde $D = C + C'$. Finalmente, la clase E está contenida en la unión $F = E + E'$. La forma general del sistema es la de un árbol cuyo tronco F se subdivide en varios E, que comprenden cada uno varios D,

etc.Completamente otro es el sistema de las inclusiones en una continuación de integraciones completivas, tales que: cuerpos A $\subset$ anillos B, o grupos C' $\subset$ monoides D $\subset$ semi-grupos E $\subset$ grupoides F. En efecto, un anillo B no es una reunión de cuerpos como un género B es una reunión de especies A y A'; y un monoide D no es una reunión de grupos C como el orden D es una reunión de familias. En otros términos, si los cuerpos A son anillos B, y si los grupos C son monoides D, los complementarios A' son anillos que no son cuerpos y no otros cuerpos que los A; y C' son monoides que no son grupos, y no otros grupos que los C. Todavía dicho de otra manera, y aquí está lo esencial, el sistema total ya no tiene la forma de un árbol cuyo tronco F (que sería la clase de los grupoides) se subdividiría hasta desembocar en una multiplicidad de especies A (que serían los cuerpos), sino que una especie de espiral de tres dimensiones en la que cada torre: 1) prolonga el precedente (ya que un cuerpo es él mismo un anillo, etc., hasta el grupoide, mientras que la unión no es un género o una especie puesto que es una reunión de todas estas unidades), y 2) agrega una operación nueva con cada ampliación. Sin regresar a la creación de nuevos contenidos engendrados por estos enriquecimientos de formas, se ve que este tipo de integración constituye una construcción continua de operaciones que completan las precedentes en sistemas sucesivos, en donde las articulaciones de números crecientes (largas composiciones para los grupoides, asociatividad para los semi-grupos, elemento neutro para los monoides, operaciones inversas para los grupos, etc.), son cada vez más fuertes y solidarias en función de la multiplicación de variaciones intrínsecas posibles, mientras que las integraciones coordinadoras se limitan a reunir las variaciones extrínsecas heterogéneas.

Entre éstas dos se sitúan las integraciones totalizantes simplemente "sintetizantes", reuniendo en una nueva totalidad sistemas, hasta este momento sin relaciones directas entre ellos, como hacen los Bourbaki para construir sus estructuras despejando los isomorfismos entre los sectores hasta aquí muy separados en el seno de las matemáticas. Pero se trata entonces de reunir las formas (haciendo totalmente abstracción de los contenidos como dicen los Bourbaki), de las variaciones intrínsecas, y no los contenidos como en las integraciones coordinadoras. Y sobre todo, las totalidades nuevas en las cuales se desemboca, incluyen sus leyes propias en tanto que totalidades, como ya bien se vio en el estudio de los morfismos, utilizados por la escuela bourbakista para la construcción de "estructuras", lo que ha conducido al descubrimiento de "categorías".

El problema es, entonces, el de las relaciones entre las generalizaciones completivas y sintetizantes, en el sentido de la irreductibili-

dad o de la complementariedad (lo que no es contradictorio). En principio, hay entre ellas una diferencia de intenciones, las primeras poseen una comprensión más grande, pero obteniendo una extensión más larga por añadidura si se compara Cf a Ec en el sentido del §III); mientras que las segundas tienden hacia una extensión más grande, pero deben pasar por las comprensiones. En seguida hay una diferencia de planos o niveles de conciencia: las primeras pueden permanecer inconscientes, y las operaciones en juego sirven de instrumento mucho antes de convertirse en objetos del pensamiento; mientras que las segundas exigen, a partir de un cierto nivel, una abstracción, no solamente reflejante (lo que es ya naturalmente el caso de las primeras), sino "reflejada", es decir, con tematización de conceptos y operaciones, y no solamente utilización de acciones.

Pero la naturaleza misma de estas diferencias muestra perfectamente que, si los dos tipos de integraciones son distintos, ellas son complementarias, en el sentido que las completivas, que representan evidentemente el núcleo central de las generalizaciones constructivas[32], constituyen sin duda la condición previa de las sintetizantes, ya que ha sido necesario construir las estructuras que están por compararse y sintetizarse. Además, la toma de conciencia o tematización exige una reconstrucción en el plano reflexivo de lo que funciona sin representación en el plano instrumental, de tal manera que, tanto las estructuras por comparar como la estructura sintética final, dan lugar a reconstrucciones y construcciones en partes nuevas sobre el nivel superior de la reflexión. Es lo que hemos visto a propósito de la velocidad (capítulo XII), donde la definición final "alguna cosa (que pasa) en un tiempo limitado", o "siempre hay el tiempo" exigió una elaboración laboriosa, mientras que la referencia a la duración haya estado implícita anteriormente: se trataba de construir una relación, en tanto tal, que se encontrara en todos los casos, y no simplemente de hacer hincapié en las variaciones ocasionales. De manera general, la abstracción reflejante y todo su estado final "reflejado", son procesos en parte constructivos, y si Kant hizo de los juicios "reflejantes" el instrumento particular de las "totalidades organizadas", sólo nos queda afirmar que la organización es una forma de construcción.

---

[32] Henriques incluso ha dicho en uno de sus reportes que "sobre el plano puramente operatorio, generalización y completamiento no se distinguen" y que "la idea de completamiento pudiendo parecer más clara que la de generalización misma, podremos eventualmente servirnos de ella para definir la generalización puramente operatoria". Apreciamos estas observaciones desde el punto de vista de una teoría del equilibrio que reposa en la solidaridad constante de los procesos de construcción y compensación...

Todavía es necesario precisar que, si las formas superiores de integración sintetizante se constituyen en el plano de la tematización reflexiva, en donde su diferencia con las integraciones completivas es la más sensible, existen formas más elementales. Desde el nivel sensomotor se pueden encontrar representantes en el caso de asimilaciones recíprocas entre esquemas. En los niveles representativos, la construcción de los primeros números naturales se efectúa por medio de una síntesis de inclusiones ($1 \subset 2 \subset 3...$) y de relaciones de orden ($1 \rightarrow 1 \rightarrow 1$, sino las unidades equivalentes permanecen indiscernibles), y éste es el ejemplo de una integración sintetizante en donde el mecanismo permanece inconsciente, ya que el sujeto no sabe que ha reunido en un nuevo todo las estructuras de clases y relaciones de las que él se sirve, además aisladamente. Es cierto que en estos casos no se trata de despejar la estructura común a los dos componentes, sino de reunirlos en un todo que comprenda los elementos o partes diferentes, así como los comunes, resultando así tres sub-sistemas AB', AB y A'B, lo que supone una especie de completamiento mutuo no jerárquico. Pero como las estructuras componentes son del mismo rango, se trata, sin duda, de generalización sintetizante más que completiva, o por lo menos de una situación intermedia que muestra el parentesco de las dos.

En una palabra, si toda integración totalizante es constructiva, por consiguiente, es necesario distinguir dos formas complementarias, de las cuales una tiende a enriquecer las estructuras desde el principio agregándoles nuevas operaciones, y la otra tiende a reunir las estructuras del mismo rango, pero en un sistema de conjunto que da cuenta de su diversidad a título de diferenciaciones intrínsecas. Tanto una como otra son necesarias para el progreso del conocimiento y, si la primera precede a la segunda, ésta, cuando una síntesis es adquirida, prepara nuevos adelantamientos posibles que son, en su turno, completivos. Si uno no limita las integraciones sintetizantes a los planes superiores de la tematización, es decir, al desenlace de un largo proceso de toma de conciencia de fuente bastante anterior, se pueden así concebir las dos formas de integraciones como intervenciones alternativas en el curso del desarrollo.

§/6-*EL DESARROLLO DE LAS GENERALIZACIONES.*- Toda la evolución psicogenética de las generalizaciones trazada en esta obra, parece dominada por una tendencia, cada vez más acentuada, por reemplazar o duplicar los conocimientos de naturaleza exógena a través de una construcción endógena; y esta tendencia puede explicarse por las leyes de la toma de conciencia, procedentes de la periferia hacia el centro, es decir, de observables (en los puntos de

interferencia entre los objetos y el resultado de las acciones) de las coordinaciones internas necesarias en el desarrollo de los actos.

En efecto, recordemos (ver los capítulos III y IV) las tres fases esenciales de la toma de conciencia. Esta comienza en medio camino de las interacciones entre el sujeto y los objetos (es decir, en la periferia con relación a los dos) y sólo se registran las observables de los objetos así como los resultados exteriores de la acción, de donde resulta la prioridad de las abstracciones empíricas. Luego viene una segunda fase de conciencia del desarrollo material de la acción y de las variaciones del objeto (por consiguiente, observables todavía), pero más numerosas, las cuales comienzan a reunirse entre ellas. Finalmente, la tercera fase conduce a la toma de conciencia de las coordinaciones internas de las acciones necesarias para su ejecución la cual es correlativa a la toma del conocimiento de las propiedades menos inmediatas del objeto: de donde resulta una parte creciente de abstracción reflejante con sus consecuencias causales en caso de atribución de operaciones al objeto.[33]

Si tal es el contexto sicológico en el seno del cual se constituyen los conocimientos es evidente que éstos no pueden originarse más que bajo una forma exógena, centrada en las observables, mientras que con la retirada de las coordinaciones internas de la acción, fuentes de operaciones, se vuelve posible una reconstrucción endógena, y se impone incluso como condición de la comprensión. Así, desde el punto de vista de la generalización, esto significa que, sosteniendo al principio sólo las observables, es decir, los contenidos, ella podría mantenerse más o menos por un tiempo largo esencialmente inductiva. Ciertamente, estos contenidos suponen un mínimo de formas para ser aprendidas, y por consiguiente una intervención de coordinaciones debidas al funcionamiento de la asimilación, lo que supone previamente una abstracción reflejante y de generalización constructiva, pero inconscientemente ligada a las observables, y dando resultado a actividades sensomotrices anteriores, sin ser por ello el objeto de nuevas construcciones en el seno mismo de la inducción representativa que no disocia para nada todavía las formas de los contenidos. Por el contrario, en la medida en que el sujeto toma conciencia de las coordinaciones de sus acciones, se vuelve capaz de construir nuevas formas, sea a la vista de la interpretación de contenidos exteriores, o engendrando gracias a ellos nuevos contenidos (números, etc.), lo que caracteriza la generalización constructiva en sus diversas variedades.

Así, esta primacía progresiva de la generalización constructiva

[33] Ver nuestra obra sobre *La toma de conciencia*, París, PUF, 1974.

no constituye un simple remplazamiento. Primero, lo inductivo no desaparece sino permanece utilizable en los casos de contenidos no (o todavía no) deducibles. Pero sobre todo hay una transformación de una en otra en las situaciones múltiples donde las variaciones al principio extrínsecas (en el sentido de §IV) están comprendidas en tanto que transformaciones posibles del sistema, convirtiéndose así en intrínsecas, y luego deducibles y generalizables constructivamente.

Pero la cuestión central del desarrollo de las generalizaciones constructivas es la de la explicación de sus poderes, dicho de otra manera, del mecanismo de la construcción misma de las novedades. Bajo esta consideración volvemos a encontrar nuestro problema permanente, recordado en la introducción: si estas novedades consisten en la actualización de virtualidades preexistentes, a la manera de la potencia y del acto de Aristóteles, ellas no son nuevas, pero si lo son realmente, ¿cómo explicar que súbitamente aparezcan como necesarias y lo sean efectivamente? Los hechos recogidos en esta obra, nos permiten las consideraciones siguientes.

La solución corriente por cuanto a la fecundidad de las matemáticas consiste en invocar la posibilidad indefinida de construir nuevas operaciones anteriores, y en particular en elevar éstas a la n-ésima potencia. En el capítulo I hemos visto a los jóvenes sujetos capaces de admitir dos particiones posibles de una misma colección, pero incapaces de utilizarlas simultáneamente; inmediatamente después logran estas combinaciones y se orientan entonces hacia el "conjunto de partes", que consiste en aplicar combinaciones operatorias a las operaciones de clasificación iniciales. Esta noción de "operaciones sobre operaciones" únicamente desplaza nuestro problema: éste sigue subsistiendo, ya que es necesario establecer si estas operaciones de potencia superior estaban virtualmente contenidas o no en las precedentes. Lo único cierto es que éstas han vuelto posibles las operaciones ulteriores, pero la cuestión se centra en la significación y naturaleza del proceso que "hace posible" una realidad futura, pero todavía no real.

Estando bien entendido que no se trata de lo posible relativo a sujetos individuales, tal que lo que no es posible a los 5 años lo es a los 12, y lo que no lo es para una inteligencia mediana podría serlo para un intelecto superior. Desde el punto de vista epistemológico, el único que nos interesa ahora, la cuestión es otra, y consiste en establecer lo que es posible obtener de un sistema dado. Desde Godel y Gentzen, hemos sabido, por ejemplo, que no es posible obtener la saturación del sistema de la aritmética elemental solamente por sus medios y los de la lógica, sino que llegamos a reforzar su coherencia recurriendo a la aritmética transfinita que, por consiguiente, nació de la generalización de las tomas de correspondencia, ya accesibles en el plano elemental. Así, dos aspectos son notables en este caso particular, tan frecuentemente

invocado. El primero es que la construcción de un sistema se apoya, no solamente en las bases anteriores (como lo querían Whitehead y Rusell en las *Principia*) sino necesariamente también en el nivel superior proporcionando la clave indispensable para la solidez del precedente, salvo que en su turno tendrá necesidad de integrarlo en el siguiente. Pero en segundo lugar, la posibilidad de este nivel superior ha sido abierta, en este caso particular, por el mecanismo de correspondencia uno a uno, y que no importa lo banal que sea, puede establecer que dos conjuntos finitos tienen la misma "potencia" que ha permitido engendrar operatoriamente, como cuando Cantor decidió colocar en bisección las series 1, 2, 3, ...; 2, 4, 6...; etc., un nuevo número que no pertenece a ninguna de estas series, pero que expresa su potencia común, "enumerable". En esta situación, la cuestión de lo posible se manifiesta en toda su agudeza. Abrir la posibilidad de construir aleph-cero implica tres condiciones: tematizar la noción de conjuntos, caracterizar sus potencias por la correspondencia término a término, y aplicar esta operación a series infinitas en el sentido usual de la palabra. Así, el niño, como el "primitivo", utiliza ya tales correspondencias "cualesquiera" (por oposición a calificadas) que son sin duda constitutivas de conjuntos; a diferencia de las clases y el infinito que es una noción corriente desde nuestro estadio III: ¿es necesario decir, entonces, que el descubrimiento de $\aleph_0$ fue posible todo el tiempo, y que sólo los factores psicológicos e históricos lo retardaron hasta que aparecieron los trabajos de un matemático contemporáneo de Frege? Sólo queda que el transfinito constituya un nuevo tipo de número y que su utilización sea necesaria, como se recuerda al instante para reforzar la consistencia de la aritmética elemental: estas dos circunstancias atestiguan un nuevo nivel de construcción bastante superior a los del principio.

Entonces, de las dos cosas, una: o bien las operaciones preexisten todo el tiempo, situadas en un "universo de posibles" independiente del sujeto epistemológico, y que éste descubre a través de tanteos de sujetos individuales, o bien este universo está en movimiento, constituyendo por ello una continuación de aberturas que ofrecen, una vez efectuadas por un sujeto, las operaciones y sus puestas en relación (en este ejemplo particular, esto sería la unión de los problemas del infinito y las correspondencias que la vía ha abierto). Así, la segunda interpretación parece imponerse por dos razones: por un lado, el sujeto existe en tanto que fuente de actividades cognoscitivas y de nuevas conexiones, y por el otro, "el conjunto de todos los posibles" es una relación antinómica, la existencia lógica de estos "todos" es una posibilidad que sobrepasa los límites de la predictabilidad combinatoria.

Si estas afirmaciones son justificadas, no se ve entonces cómo conferir a un conjunto de posibilidades un carácter estático dado una vez por todas, ya que lo propio de una construcción operatoria es no solamente engendrar relaciones actuales, sino "hacer posibles" una serie de otras, en donde se trata de establecer cómo están ellas determinadas. Así, los hechos descritos en los capítulos III-V a propósito de la recurrencia, muestran perfectamente cómo solamente apoyándose en la continuación de la construcción se

comprende lo que procede. Sobre este punto recordemos el ejemplo más simple estudiado en otro lado con B. Inhelder: poniendo con una mano una perla en un recipiente transparente, y con la otra una perla en un tarro cubierto, los jóvenes sujetos están seguros de haber conformado dos colecciones iguales $n = n$, pero se niegan a afirmarlo por lo que toca a una continuación indefinida. Desde el nivel IB encontramos, por el contrario, sujetos que responden como un niño de 5 años y 1/2: "Cuando se sabe por una vez, se sabe para siempre". Dicho de otra manera, la consideración de los resultados de la acción hasta n, no es suficiente para la tematización de los casos $n + n'$, aunque el sujeto esté a punto de construir estos $n + n'$ en el plano de su acción misma, mientras que la toma de conciencia de las coordinaciones internas de la acción conducente de $n = n$ a $n + 1 = n + 1$, por consiguiente, del pasaje de las construcciones acabadas a las que están abiertas sobre la continuación de construcciones posibles, da la razón retroactivamente, hasta aquí incomprendida, a la igualdad $n = n$. Como dice Henriques, la explicación en matemáticas hace depender la tematización a un nivel inferior de lo que está en vía de construcción en el nivel superior, pero por un proceso de completación operatoria todavía no tematizada, aunque conducente ya implícitamente a la estructura superior todavía no despejada.

Otro conjunto de hechos por vertir en el expediente de la constructividad es la manera en que el niño descubre, no solamente la existencia conceptual de las posibilidades, si se pueden expresar así, sino el carácter operatorio del hecho que están ligadas unas a otras por conexiones necesarias. El principio general de esta formación de posibilidades es el pasaje de las variaciones extrínsecas, simples estados de hecho, a las diferenciaciones intrínsecas, es decir a las transformaciones posibles implicadas en las significaciones del principio. Hemos visto así, en el capítulo X, cómo los sujetos, en parte desde el nivel IIB, y explícitamente en el estadio III, llegan a establecer ligas necesarias entre los eventos que no se llegan a realizar. En el capítulo VIII (conclusiones) hemos insistido sobre el factor esencial de la generalización que es la supresión de las limitaciones, lo que nos remite de la misma manera a la apertura de nuevas posibilidades.

Por otro lado, es notable que esta continua apertura de los posibles no es constante únicamente en las generalizaciones lógico-matemáticas, sino que intervenga también en el plano físico, tan pronto como las inducciones formativas de las leyes se completan con la construcción de modelos explicativos, por lo que la búsqueda de una causalidad consiste en atribuir a los objetos el correspondiente de nuestras

operaciones. El capítulo XI nos ha demostrado, bajo esta consideración, cómo la interpretación de los estados de equilibrio, con la noción de lo virtual que incluye, o de las acciones y "reacciones", por el hecho que estas últimas permanecen inobservables, conllevan a la construcción, no solamente de formas nuevas de generalización, sino de nuevos contenidos que se sitúan en un nivel de posibilidades; mientras que la construcción lógico-matemática consiste, entre otras, en engendrar un universo siempre más rico en transformaciones posibles. Es al hundir aquí lo real que la explicación física logra sus fines. De la misma manera, el capítulo XIII nos ha hecho percibir, a propósito del centro de gravedad, cómo las "líneas de equilibrio" observadas colocando en el borde de una mesa objetos rectangulares o circulares, pasan los primeros de 2 y 4 a una "infinidad", tan pronto como es imaginada la posibilidad de rotaciones análogas a las de los segundos: este número concebido de golpe como infinito es afectado por simples desplazamientos físicos virtuales, aunque de hecho es un número siempre finito e incluso muy restringido si uno se limita a los estados discernibles y a las duraciones limitadas, lo que muestra perfectamente que este hundimiento de lo real en lo posible implica una novedad.

Inútil recordar, para completar este cuadro del pasaje general de lo exógeno a lo endógeno, que el motor constante que empuja al sujeto a completar o remplazar las simples constataciones de hecho (con todo lo diferenciadas que puedan volverse, sobre la presión de la experiencia, las relaciones o leyes así establecidas) por reconstituciones deductivas y operatorias es la búsqueda de la "razón" de los resultados obtenidos por la abstracción empírica o seudo-empírica. Así, como la "razón" A (lógica o causal) de una aserción o de un hecho es por esencia un término suplementario, porque A una vez despejada, se trata de descubrir la razón B de A, luego C de B, etc., reencontramos así lo que constituye sin duda el proceso central de la generalización constructiva, a saber, que la elaboración de una estructura se apoya siempre en los pasos ya completivos, pero todavía inconscientes que preparan la o los siguientes.

§ 7 - *EQUILIBRIO DE DIFERENCIACIONES E INTEGRACIONES.* En la medida en que la generalización es constructiva, exige un proceso continuo de equilibrio: del hecho que ella se apoya sin cesar en las construcciones en cambio y no solamente en las estructuras anteriores que, solas, permanecen estables, y porque ella se manifiesta sobre "variaciones intrínsecas", cuyo número se incrementa necesariamente, los elementos que ella tiene por tarea reunir, completar o sobrepasar, constituyen sistemas esencialmente móviles, entonces,

es evidente que estos logros deben incluir el carácter fundamental de sustituir los mejores equilibrios por los de la salida; dicho de otra manera, deben proceder a realizar "equilibrios mejorantes".

Pero el equilibrio, o más bien, los reequilibrios continuos que debe alcanzar la generalización constructiva son de un tipo particular y surgen sobre todo de la tercera forma de equilibrio que hemos distinguido antes sobre el terreno de las funciones cognoscitivas. La primera caracteriza el ajuste necesario de la asimilación y la acomodación dentro de las relaciones entre el sujeto y los objetos. La segunda es aquella que interviene en las relaciones entre los subsistemas cuando las perturbaciones internas o las contradicciones los obligan a adoptar asimilaciones (parciales) y acomodaciones recíprocas, lo que suscita cuestiones de equilibrio. Pero la tercera, que nos interesa aquí, es de otra naturaleza y tiene un carácter totalizante sintetizante de generalización en sus integraciones. Nosotros la llamaremos equilibrio entre las diferenciaciones e integraciones, ya que una vez constituidos los sub-sistemas por diferenciaciones, sólo queda la integración que conduce a la formación de estructuras totales que las engloba, pero que agrega leyes de composición propias a estas totalidades como tales, las cuales sobrepasan las propiedades particulares de los sub-sistemas. En este caso un nuevo problema de equilibrio surge necesariamente y se distingue de aquél que tiene que ver solamente con las relaciones de los sub-sistemas entre ellos. En efecto, una diferenciación demasiado avanzada, incluso si hay más incompatibilidad entre los sub-sistemas, puede impedir la construcción de sistemas totales, lo mismo que una integración demasiado fuerte o demasiado rápida puede arruinar las diferenciaciones necesarias. Se trata, de establecer en qué ocasiones y cómo se constituye este equilibrio de la tercera forma.

Un sistema cognoscitivo está en equilibrio cuando las operaciones que lo componen son interdependientes, y se desequilibra en caso de conflictos o lagunas, las cuales no juegan un papel perturbador más que cuando ellas se oponen a la solución de un problema (la ignorancia de cada uno en los dominios que no le conciernen para nada está considerada como laguna). Entonces, el reequilibrio es el efecto de regulaciones que proceden por compensaciones, negativas (neutralización de perturbaciones) o positivas (reforzamientos en caso de deficiencias). Es claro que las construcciones que dan su nombre a la generalización constructiva son siempre compensadoras al mismo tiempo que productivas: que se trate de integraciones completivas o sintetizantes, ellas responden siempre a necesidades, y éstas son la expresión de un desequilibrio momentáneo. Pueden reforzar

una estructura demasiado débil para el problema actual por resolver, y la compensación consiste, en este caso, en llenar una laguna (como en nuestro capítulo I cuando el problema planteado conduce a orientarse en la dirección del conjunto de las partes). Todavía es importante introducir la coherencia despejando una estructura común en presencia de sub-sistemas demasiado diferenciados que conduciendo a contradicciones: la compensación viene en este caso a eliminar el conflicto a través de un juego combinado de diferenciaciones y de integraciones (como en nuestro capítulo XII en donde el número de dientes y de vueltas de rueda obligan a distinguir dos velocidades al mismo tiempo que despejan la idea general de velocidad). La necesidad de una síntesis común de un rango superior a aquélla de los sub-sistemas se impone en particular cuando un problema originado por un sub-sistema sólo puede resolverse por medio de operaciones tomadas de otro, como es el caso en la génesis de los números, cuando la abstracción de las cualidades obliga a recurrir al orden para distinguir las unidades equivalentes y preservar las inclusiones, lo que desemboca en la sustitución de la iteración $(1 + 1) » 1$, por la tautificación $A + A \times A$ y engendra una estructura mucho más rica que la de los sistemas componentes.

En una palabra, la necesidad de reequilibrios constantes, con compensaciones destinadas a levantar los obstáculos o a llenar las lagunas se impone por el hecho que cada diferenciación nueva es fuente de tales conflictos o de tales inacabados. Así por su lado, las diferenciaciones se imponen desde dentro, por así decirlo, a la generalización constructiva, y no solamente desde fuera como con las inducciones, por el hecho de que ésta procede esencialmente de la comprensión, además de que engendran nuevos contenidos en extensión y no permanece extensional como los procesos inductivos. En efecto, una de las lecciones de los hechos recopilados es que en el plano de la comprensión, el pensamiento nunca es estático. Por cuanto a la extensión, existen individuos y clases A, B, etc.: éstas y sus fronteras con no-A, no-B, etc., están dadas a título de estados, con peligro de verse modificadas por nuevos descubrimientos empíricos. En el plano de la comprensión, por el contrario, la significación de los caracteres de A, B, etc., es inagotable, y si no se la limita artificialmente con definiciones decisivas, ella se mantiene abierta a una serie de posibilidades, y en particular a las "diferenciaciones o variaciones intrínsecas" que podemos deducir. Son entonces estas variaciones las que conllevan las diferenciaciones y obligan a los reequilibrios a través de integraciones complementarias. Por cuanto al mecanismo de estos equilibrios, tiene que ver primero con la regulación, y luego con el

ajuste activo de las negaciones en relación a las afirmaciones, y las fronteras entre ellas tienden a desplazarse continuamente según las estructuras por construir. Esto se puede percibir de entrada desde el examen de las cuestiones de las limitaciones. Por un lado, en efecto, toda nueva variación intrínseca (sea ella espontánea o haya tenido un comienzo de variaciones extrínsecas, inmediatamente después comprendidas en tanto deducibles) consiste en suprimir las limitaciones. Por ejemplo, vemos en el capítulo VIII (conclusiones) cómo el sujeto descubre, a propósito de las relaciones entre rectas móviles que pasan sobre otras que están fijas, la posibilidad de superposiciones simples, luego, no "solamente" tales, sino también oblicuas, etc.: cada "no solamente" marca así la supresión de una limitación, es decir, un enriquecimiento por apertura sobre nuevos posibles. Pero, por otro lado, estando una estructura construida, el hecho de completarla con una operación nueva o un axioma más fuerte, revierte de golpe en una limitación: agregar a los grupos un carácter de conmutatividad consistente en crear la estructura de grupos abelianos, pero al mismo tiempo, en oponerla a la de los grupos no conmutativos, etc.

El ajuste de las negociaciones constituye uno de los aspectos del mecanismo central del equilibrio, y como lo hemos visto en otro lado[34], al estudiar la contradicción, está muy lejos de ser simple. Las que los jóvenes sujetos admiten más fácilmente son las que están impuestas desde fuera por un equívoco que dan a los hechos una previsión falsa. Pero, incluso bajo esta forma exógena, la negación no se acepta sin dificultades, y como ya lo ha demostrado Inhelder, Sinclair y Bovet en sus interesantes experiencias sobre el aprendizaje, los sujetos preoperatorios frecuentemente permanecen insensibles a los contraejemplos, prefiriendo negligir o deformar las observables no previstas ni deseadas, en lugar de someterse a estas negaciones, por tanto obligadas y siempre reconocidas desde el nivel II.

Por otra parte, cuando se trata de generalizaciones constructivas con elaboración de formas o contenidos nuevos (en diversos grados), las negaciones dependen de las actividades del sujeto y juegan, en este caso, un papel fundamental. Para empezar, se puede hablar de una especie de papel funcional general. La condición previa de una generalización constructiva, en donde no es suficiente encontrar sin más una observable, sino que transformar los instrumentos cognoscitivos utilizados (o la interpretación hasta aquí aceptada de un cierto dado), es comenzar por negar, explícita o implícitamente, que el estado de partida de estas transformaciones sea definitivo o

[34] Ver los "Estudios", vol. XXXI y sobre todo XXXII.

sea el único posible. Por ejemplo, empezando por operaciones de "grupos", en donde la reunión de clases separadas para orientarse en la dirección de los conjuntos de partes, el sujeto debe primero decidir que estas reuniones no son suficientes, por lo que otras combinaciones son necesarias y, en relación a éstas, las primeras hay que limitarlas, lo que incluye de entrada negaciones parciales.

Por cuanto a las negaciones solidarias de las diferenciaciones intrínsecas, ellas pueden imponerse considerando dos tipos de situaciones que es necesario distinguir. La primera es donde hay problemas que hacen intervenir variables: en este caso el sujeto puede sufrir las variaciones y las interpreta después, principiando así con diferenciaciones extrínsecas y negaciones impuestas desde fuera, o bien, puede intentar prever y explicar las variaciones y sus efectos, resultando un sistema de variaciones intrínsecas, pero con un ajuste obligado y endógeno de negaciones como juicios positivos. En segundo lugar, se debe considerar en un nivel superior a los precedentes la situación en que el sujeto en presencia de una estructura o de un conjunto de hechos, imagina e introduce él mismo las variaciones posibles, dando origen a la búsqueda de sus razones y a la intervención de estructuras más fuertes cuando las abstracciones y tematizaciones reflexivas proveen de razones suficientes. En este caso, las negaciones son impuestas por la lógica interna del sistema, e incluso son frecuentemente introducidas a título de método explorativo y generalizador: geometrías no euclidianas, series no arquimidianas, álgebras no conmutativas, etc.

Unicamente si este ajuste de negaciones constituye uno de los dos polos, por así decirlo, del mecanismo central del equilibrio, en donde uno está naturalmente en función del otro, sucede la consolidación de las afirmaciones, y las dos aseguran entonces las compensaciones necesarias para el progreso de la reversibilidad operatoria. Bajo esta consideración, lo propio del equilibrio mejorante que caracteriza toda generalización constructiva lograda es el incremento de la necesidad interna del sistema. Así, esta necesidad que, de manera general, depende del grado del cierre de las estructuras, resulta primero precisamente de este equilibrio de las negaciones y de las afirmaciones: despejar la necesidad de *a*, es establecer la imposibilidad de *no-a*, el cierre pudiendo haber sido concebido como el conjunto de posibilidades e imposibilidades inherentes al sistema.

Pero todavía hay más, o mejor aún, este equilibrio implica otro aspecto fundamental: si las diferenciaciones conllevan la obligación de una integración para unirlas so pena de desequilibrio, recíprocamente el equilibrio no se logra más que cuando las diferenciaciones están comprendidas como resultado necesario del modo de integra-

ción (principio de variaciones intrínsecas), sino ellas permanecen en el estado de realidades heterogéneas, lo que se opone a la realización de un cierre.

Así, decir que las integraciones y diferenciaciones se necesitan mutuamente, nos lleva a sostener que ambas incluyen sus "razones", y es el acceso al nivel de estas razones, (el álgebra del sistema) lo que caracteriza finalmente su equilibrio. En efecto, en la medida en que la forma superior de la generalización constructiva, es decir, su forma "completiva", vuelve a llenar las lagunas, lo que constituye un proceso equilibrador, es una la que se abre al término de todo encadenamiento generalizador logrado: la del porqué de su necesidad misma, ya que ella desemboca en novedades reales y no resulta de una preformación.

Entonces, la respuesta parece ser que la generalización constructiva desemboca en otra forma de equilibrio que la de los esquemas en relación con su contenido empírico (por consiguiente de los objetos) o que la de los sub-sistemas entre ellos, y que este equilibrio de integraciones totalizantes y de diferenciaciones intrínsecas implica, una vez realizado, relaciones de mutua dependencia que aseguran la necesidad. Efectivamente, en la medida en que el sistema total implica, en tanto que tal, sus leyes propias de composición, y que las leyes de los sub-sistemas se deduzcan por el mecanismo de las variaciones intrínsecas, la necesidad de estas relaciones diversas se encuentra justificada y susceptible de proporcionar sus razones. Por otro lado, se suscita la cuestión del porqué de las que se desplazan o reposan por iteración continua; el establecimiento de una razón origina, tarde o temprano, el problema de la razón de esta razón, entonces los cierres obtenidos no excluyen jamás la apertura sobre nuevas totalizaciones. La tematización ligada a cada cierre se apoya sobre construcciones todavía no tematizables, por lo que está ya en devenir, asegurando así una fecundidad proactiva no contradictoria con el rigor retroactivo.

CAPITULO XV
GENERALIZACION OPERATIVA Y GENERALIZACION FORMAL EN MATEMATICAS

por Gil Henríques[35]

Una epistemología de la generalización debe incluir, para ser general, un estudio de la generalización en matemáticas. Una comparación entre las formas de generalización que atestigua la historia de la ciencia, y que encontramos en la psicogénesis de las estructuras cognoscitivas, presenta sin duda un interés capital para toda epistemología con una orientación constructivista. La generalización en matemáticas ofrece a este propósito el doble interés especial de la gran riqueza de ejemplos instructivos, algunos muy simples, que se presentan a nuestra consideración, así como de la pureza en la cual se revelan las características de los procesos en causa.

La generalización en matemáticas se distingue, además de que su papel es propiamente *constitutivo*; ya que si es cierto que los procesos generalizadores intervienen en grados variables en el desarrollo de no importa qué rama del saber, siguiendo el grado de elaboración teórica respectiva, las matemáticas no es la única ciencia en la que el proceso interviene en la constitución misma del objeto conocido. Todos los objetos matemáticos son, en efecto, formas de diferentes grados, provistos de proceso de abstracción reflejante que implica aspectos de generalización. El pensamiento matemático llega así, después de haber ejercido sus operaciones o preoperaciones sobre los sujetos concretos que les sirven de soporte en sus estadios más elementales, a operar sobre objetos propiamente matemáticos, cuyo grado de generalidad corresponde a las capacidades abstractivas del sujeto. Hablaremos a este propósito de *generalización formal*, tratándose de despejar la forma o concepto común a varios objetos o estructuras matemáticas previamente concebidas como heterogéneas, o incluso no previamente concebidas (en el caso de las estructuras operativas, ejerciéndose sin tematización adecuada).

Ninguna extensión (en el sentido lógico de extensión de conceptos) se logra en matemáticas sobre la base de procesos de generalización

---

[35] Profesor de Matemáticas en la Universidad de Oporto.

formal, ya que las construcciones de extensiones, sobre todo cuando ellas son infinitas, supone la constitución previa de comprensiones tematizadas. Sucede frecuentemente que las formas despejadas por generalización formal se aplican, además de los objetos o estructuras que proporcionan el punto de partida de la generalización, a nuevos objetos así concebidos por primera vez. Es así que el hecho de tematizar una cierta forma de estructura general hace posible, y algunas veces necesario, considerar nuevos modelos no concebidos con anterioridad. En situaciones parecidas, no se trata solamente de la constitución de un concepto unificador que defina una extensión matemática, sino que la generalización forma el generador de un crecimiento extensional del dominio conocido.

Por importantes que sean las características específicas que requieren de un estudio epistemológico particular de los procesos de generalización en matemáticas, éstos participan igualmente de características comunes a muchos otros procesos generalizadores. Sugerimos que su estudio puede resultar útil para la comprensión de toda la problemática de las generalizaciones constructivas (ver las conclusiones generales de Piaget, en este volumen) que sobrepasan las fronteras de la epistemología de las matemáticas en el sentido estricto. Las estructuras matemáticas que, una vez constituidas, sólo requieren para su estudio de métodos de la matemática formal, son tributarias, por lo que respecta a su génesis, de una reflexión que se refiere a la organización general de los instrumentos cognoscitivos del sujeto. Es evidente que el juego operatorio debe alcanzar primero un grado de generalidad suficiente para que la reflexión que le corresponde pueda desembocar eventualmente en la constitución de estructuras matemáticas formales. El estudio de la generalización en matemáticas, desde el punto de vista de la epistemología genética, debe evidentemente remontarse a las formas primordiales de la generalización que se refieren a los instrumentos del conocimiento. Hablaremos en este sentido de la *generalización operatoria*, en el sentido de “instrumental” o “actuante”: se trata del pasaje de instrumentos cognoscitivos más débiles a instrumentos más fuertes, de la integración de estructuras más pobres en estructuras ricas (fuerza y riqueza intervienen aquí en un sentido metafórico que es idéntico para las dos): se entiende que las estructuras de las que se trata son estructuras cognoscitivas que no suponen la tematización explícita, que los haría objetos de pensamiento reflexivo. Hay aquí una diferencia mayor entre las generalizaciones operatorias y las generalizaciones formales. Sostenemos una prioridad genética general de las primeras en

relación a las segundas, por lo que pertenece a cada dominio determinado, debido a que la tematización es en cada caso el resultado de un desarrollo secundario, incluso cuando es muy importante, sobre todo en matemáticas. Remontando de las generalizaciones formales a las operatorias que las han hecho posibles, la epistemología de la generalización matemática adquiere su pleno valor en el cuadro de la epistemología genética.

Todo nos lleva a creer que la problemática de la generalización en matemáticas gira en buena parte alrededor de las relaciones funcionales entre los dos tipos de generalización indicados. A este propósito, quisiéramos señalar antes que nada, que sus objetivos funcionales primarios son muy diferentes. En todo proceso de generalización operatoria, lo primero que se investiga son las comprensiones más grandes; en todo proceso de generalización formal, lo primero que se investiga son las extensiones más grandes. La epistemología podrá y deberá rendir cuenta de un buen número de hechos epistemológicos debidos al juego complementario de estos dos tipos de procesos generalizadores. Tendremos a la vista sobre todo el hecho fundamental, aunque evidente para Piaget, del incremento complementario y frecuentemente simultáneo de la comprensión y de la extensión de experiencias de un pensamiento constructivo, que se sucede a medida que los progresos de la construcción se dan a pesar de la relación siempre recíproca entre las extensiones y las comprensiones de los conceptos dentro de una teoría cualquiera (siempre y cuando las extensiones sean definidas). Este hecho nos coloca en una situación donde los supuestos epistemológicos, sólidos y fundamentales, aparecen, a primera vista, irreconciliables. De aquí resulta un sentimiento inicial de insatisfacción frente a las evidencias en causa y la exigencia de una explicación que las integre.

Ejemplos prototípicos de procesos de generalización operatoria son los procesos de completamiento que se encuentran en cualquier punto de las matemáticas. Si se quiere clasificarlos, el principio estructuralista se ofrecería de inmediato: por tantos tipos bien definidos de completamiento matemático, habrá tipos de estructuras por las cuales se defina la "completud". Así, aparecen los completamientos algebraicos, ordinales, topológicos, etc., categóricos. Todas estas complementaciones tienen de común que se trata siempre de un pasaje a estructuras más ricas, el motor siendo en cada caso, el agregado de operaciones nuevas o el crecimiento de las condiciones del juego operatorio por las ya disponibles. Si por ejemplo, a partir de un cuerpo no algebraicamente cerrado construimos el cierre

algebraico, hacemos el pasaje, al nivel de las estructuras, de la de los cuerpos (relativamente más fuertes a la de los cuerpos algebraicamente cerrados relativamente más fuerte). Aquí se trata, como siempre en contextos parecidos, de la "fuerza" comprensiva, estando las comprensiones más grandes operatoriamente definidas por los morfismos de inclusión. El pasaje de un anillo, digamos íntegro, al cuerpo de fracciones respectivo es también de tipo completivo. Se tiene aquí, en el nivel de las estructuras el pasaje genético: anillo cuerpo, con la relación: cuerpo ⇒ anillo, para las comprensiones, y la relación recíproca: clases de cuerpos ⊂ clases de anillos para las extensiones, estando la extensión en cada caso (siempre y cuando esté definida) determinada por la comprensión.

Ejemplos prototípicos de procesos de generalización formal son los procesos de construcción de estructuras generales, poniendo en obra ciertos sistemas de morfismos. Estos sistemas son ya, desde el punto de vista genético, categorías, que en principio permanecen como instrumentos de tematización, aunque ellos mismos no estén tematizados. Si un sujeto, por la construcción de morfismos de estructura que ponen en correspondencia anillos de diferentes tipos (entre los cuales hay cuerpos algebraicamente cerrados o no, conmutativos o no) previamente construidos en el concepto de estructura de anillo en general, es claro que abstrae con ello las diferencias que distinguen, por ejemplo, lo conmutativo de lo no conmutativo, los anillos de los cuerpos, y de aquellos que no lo son, y por este hecho incluso él sobrepasa en abstracción los conceptos como el de los cuerpos en tanto tales, sólo para conservar de la comprensión de la estructura del cuerpo las propiedades que surgen de hecho de la estructura de anillo en general. Este ejemplo pone en evidencia un pasaje genético: cuerpo → anillo en general, de sentido contrario del considerado hace un momento, a propósito de las generalizaciones operativas. Las relaciones de extensión y comprensión ya han sido señaladas. Juegan naturalmente en los dos casos de manera recíproca, ya que los pasajes genéticos son ellos mismos de sentido contrario.

De entrada hemos puesto nuestra atención sobre las diferencias de orientación general entre los procesos de generalización operatoria y de generalización formal. Las últimas tienden hacia una generalidad abstracta que recubre las extensiones cada vez más grandes, mientras que las primeras, que sólo buscan agrandar el juego operatorio, serían, si es legítimo considerarlas desde un punto de vista extensional —lo que ya comienza a parecer dudoso— "generalizaciones especializantes", ya que la extensión recubierta se vuelve cada vez más restringida a la medida del enriquecimiento comprensivo. Por consiguiente, cuando las comprensiones no son tematizadas, las

extensiones se mantienen, por una fuerte razón, puramente virtuales. Lo que llamaríamos paradójicamente "generalizaciones especiales" no existe, por consecuencia, como tal para el sujeto que procede a las generalizaciones operatorias y sólo expresa una comprensión imperfecta de parte del epistemologista. Si se insiste todavía en hablar de una perdida de extensión en ocasión de las generalizaciones operatorias, estaría bien hacer notar lo que hace ella mientras se ocasiona una pérdida en comprensión siempre análoga en ocasión de generalizaciones formales, ya que se pierde cada vez en extensión lo que se gana en comprensión, y recíprocamente (a condición de fijar de manera unívoca el nivel conceptual escogido para hacer las comparaciones)[36]. Si nos atenemos entonces a sus objetivos funcionales verdaderos, es necesario decir que ni la generalización operatoria ni la generalización formal consideran una pérdida cognoscitiva para el sujeto, sino una ganancia muy positiva en los dos casos. Hemos visto en qué consisten estas ganancias. La conquista mental de las comprensiones debe preceder en cada caso a la de las extensiones respectivas, por lo que es natural que el pensamiento se limite a la persecución de las más grandes comprensiones sin tematización completa, para pasar enseguida a las tematizaciones que permiten la conquista de las extensiones más grandes. Es lo que realizan según su turno los procesos de generalización operativa y formal. Su juego combinado proporciona ya un principio de explicación del incremento conjunto de las extensiones y de las comprensiones en matemáticas, en el que Piaget ha hecho hincapié. Es sólo un pequeño principio en la vía de la explicación buscada, ya que los dos procesos no juegan simultáneamente en los mismos dominios, ni en los mismos niveles, por lo que no hemos explicado el incremento *simultáneo* del que se trata frecuentemente. Lo que precede demuestra por qué la evolución global del pensamiento matemático se encamina hacia comprensiones cada vez más ricas y hacia extensiones cada vez más grandes, sin que las relaciones genéticas e incluso la verdadera solidaridad de los dos desarrollos no se hayan puesto todavía en evidencia.[37]

---

[36] Ciertos sujetos padecen un sentimiento de temor ante la perspectiva de abstracciones asociadas a las generalizaciones formales que exigen los estudios matemáticos. Hay algunos que logran expresar las razones de este sentimiento por la anticipación de algo que tiene una cierta relación con la "pérdida de comprensión" de la que hablamos. Es interesante comparar, en este punto, las tomas de posición de ciertos filósofos irracionalistas. Los instrumentos subyacentes a estas tomas de posición provienen de razones psicológicas y psicosociales de las que no nos ocuparemos aquí.

[37] Por lo que se relaciona con la paradoja aparente de las "generalizaciones especializantes", y más generalmente de las relaciones entre la comprensión y la extensión

Después de haber subrayado algunas diferencias de orientación general entre los procesos de generalización operatoria y de la generalización formal, conviene insistir en la solidaridad funcional. Aprovechando la ocasión nos corregimos de una impresión unilateral que podría surgir de las consideraciones anteriores. La dependencia genética indiscutible de las generalizaciones formales en relación a las generalizaciones operatorias parece, en efecto, implicar que las primeras son generalmente de un nivel mental superior a las segundas, que no implican una tematización adecuada. Esto es verdadero cada vez que se determinan de manera precisa los dominios y los niveles concernidos por la comparación. Pero ahora demostraremos cómo la construcción matemática hace depender de una manera muy general lo que el sujeto tematiza por generalización formal en los niveles relativamente inferiores de objetividad mental en relación a lo que está a punto de construir a los niveles superiores, siempre imperfectamente tematizados, en donde juega la generalización operatoria. Esto nos permitirá completar las consideraciones precedentes y demostrar por qué y cómo las extensiones y las comprensiones se incrementan simultáneamente en matemáticas, como la historia y la psicogénesis lo atestiguan; la diferencia de niveles que pondremos en evidencia permitirán explicar el acuerdo de los hechos con el principio general de reciprocidad entre las relaciones de comprensión y extensión.

Entre una cantidad de ejemplos posibles, escogeremos dos muy importantes, en donde el primero es posiblemente el más simple que podríamos presentar: las extensiones sucesivas de la noción de número a través de los procesos de generalización formal, dependen genéticamente de una búsqueda de completamiento sobre un plano superior, no tematizado. Que estos procesos de extensiones sucesivas sean ellas mismas generalizaciones formales es la evidencia misma, ya que se despeja en cada nueva etapa un nuevo concepto de número que jugará el papel de forma común a todos los objetos matemáticos (números) que él recubre (entre los cuales, hagámoslo notar, algunos que son concebidos por primera vez, ya que se trata de extensiones). Pero cada una de estas generalizaciones formales (generalización de un concepto, objeto del pensamiento) depende genéticamente de un complemento operatorio sobre el plano superior de

---

en las generalizaciones constructivas, el lector podrá remitirse a las conclusiones generales de Piaget. El texto de Piaget es sumamente interesante ya que proporciona un esclarecimiento epistemológico general a problemas específicos de la epistemología de las matemáticas, agregando comparaciones útiles para las situaciones extramatemáticas.

las estructuras respectivas.[38] Por ejemplo, el pasaje de los enteros a los racionales depende genéticamente del pasaje: anillo → cuerpo de fracciones respectivo sobre el plano de las estructuras, ya presentado más arriba como ejemplo de completamiento operatorio. Sin duda, el hecho de que al principio no haya toma de conciencia de las estructuras en toda su generalidad no les impide estar presentes sobre el plano operatorio, y el proceso de generalización que les concierne es genéticamente determinante. Otro ejemplo de una situación análoga es el de la generalización de las estructuras formales. Volvemos a encontrar la misma relación de un proceso tematizando procesos de completamiento operatorio de estos instrumentos categóricos. Es el caso, por ejemplo, de la generalización formal que va de los cuerpos a los anillos en general, que son una especie de estructura menos rica en comprensión. Ella se apoya sobre la generalización operatoria que pasa de la categoría de los cuerpos a la de los anillos, que es una categoría más rica, por el agregado de nuevos objetos y de nuevos morfismos. Es un nuevo ejemplo de completamiento operatorio, llevando consigo esta vez las categorías, nuevamente sin que una tematización completa sea requerida. Se hará hincapié en la reciprocidad característica de las relaciones de comprensión en los niveles respectivos de las estructuras tematizadas y de los instrumentos categóricos de la tematización.

La construcción matemática se persigue indefinidamente, y se excluye que alcance jamás un nivel supremo. Es evidente, por otro lado, que la distinción entre los niveles inferiores y los superiores en lo que precede es relativa; lo que sucede en un cierto momento del desarrollo del nivel superior, no tematizado, puede convertirse a continuación, nivel relativamente inferior, en un objeto de tematización. Pero entonces asistimos a inversiones espectaculares del orden de las prioridades genéticas, que ameritan un análisis particular. Considerando las relaciones entre la construcción operatoria y la tematización de las estructuras, inmediatamente nos vemos tocados por la inmensa diferencia cronológica entre las dos las tematizaciones explícitas de las estructuras matemáticas son el resultado de desarrollos recientes, a pesar del hecho de una utilización operatoria milenaria para muchas de ellas. Además, a grandes rasgos, se notará inmediatamente que el orden de las tematizaciones no reproduce el de la construcción operatoria, sino más bien lo contrario. La estructura del anillo, por ejemplo, precede a la del cuerpo en el orden

[38] La distinción de los niveles de los que aquí se trata, se expresa, entre otros, por el hecho que la propiedad de construir un cuerpo no pertenece a los números racionales considerados individualmente.

de la construcción operatoria, del mismo modo como, en otro lado, las estructuras del semi-grupo y del monoide preceden a la del grupo, estando entendido que en todos los casos de construcción operatoria que nos interesan aquí, las estructuras consideradas sólo se realizan un vez que la tematización haya sido adquirida, como sucede con los modelos muy particulares de estas diferentes especies de estructuras. Así por lo que toca al orden de las tematizaciones históricas respectivas, la estructura de los cuerpos ha precedido a la de los anillos, del mismo modo que la estructura del grupo ha precedido a las del monoide y a la de los sub-grupos. Esta tematización y la construcción operatoria proceden las dos naturalmente de un orden de generalidad creciente, lo que resulta incompatible con la inversión mencionada.

La explicación de esta nueva paradoja es muy simple, y se le puede entrever a la luz de las consideraciones anteriores. El proceso histórico de la tematización y el proceso psicogenético de la construcción operatoria son dos procesos de orientación generalizadora en su conjunto. Es aquí que la distinción entre generalizaciones operatorias y generalizaciones formales nos será particularmente útil. Ya que si las generalizaciones que intervienen en la construcción operatoria están naturalmente antes que cualquier generalización por completamiento operatorio, aquellas que se vuelven a encontrar en los procesos de tematización son ante todo generalizaciones formales. Así, nada hay más falso que creer que la generalización formal se limita a tematizar el proceso de la generalización operatoria, como si la tematización de las estructuras más pobres de la partida precedieran generalmente a la de las estructuras más ricas que resultan del completamiento operatorio. La regla es precisamente lo contrario. Se comprende, sobre todo teniendo en cuenta el inmenso desfase temporal entre la construcción operatoria y los procesos de tematización respectiva, que éstos tomen por objeto primordialmente los resultados acabados de la construcción, antes de volver a subir, por vía de la regresión, a las estructuras de partida más débiles desde el punto de vista operatorio. Es así que el más débil, desde el punto de vista operatorio, corresponde a las comprensiones más pequeñas, y que acabe por determinar, después de la tematización, la generalidad formal más grande, que corresponde a las extensiones más grandes. La dependencia funcional de la generalización formal de las estructuras, en relación al completamiento operatorio de los instrumentos categóricos respectivos, es la razón psicogenética profunda por la cual, por ejemplo, la tematización de la estructura de cuerpos (resp. de grupo) *debe* preceder a la estructura del anillo (resp. del monoide o del semi-grupo).

Hay toda la razón para creer que las situaciones que acabamos de considerar son paradigmáticas por lo que toca a las relaciones entre la construcción operatoria y la tematización de sus resultados. Concluiremos con la referencia de otro ejemplo notable, el de la construcción espacial, que precede de nuevo largamente, con sus principios preoperatorios, luego operatorios, a la tematización completa y general de las estructuras geométricas. Particularmente interesante en este ejemplo, por otro lado análogo a los precedentes, es el hecho de una gran separación cronológica entre las tematizaciones históricas que corresponden a las diferentes fases de la construcción operatoria. La tematización de la estructura métrica euclidiana del espacio había conducido ya, desde los griegos, a desarrollos teóricos muy avanzados, pero hubo que esperar hasta la época moderna para que las estructuras proyectiva y afín subyacentes fueran tematizadas, luego otra vez hasta los desarrollos recientes, para que les tocara a las estructuras topológicas, las más profundas, ser el objeto de un estudio temático. Este gran muestrario temporal era conocido por los interesados en este dominio teórico, y se llegó a una concepción clara de las relaciones entre las prioridades históricas de diferentes geometrías y los grados de generalidad formal respectivos, sobre todo desde que el programa de Erlagen permitió dar a sus distinciones una precisión óptima. Así, Piaget ha demostrado, desde sus primeros trabajos sobre la psicogénesis espontánea de las estructuras espaciales, que el orden de las prioridades genéticas era el reverso del de las prioridades históricas, y que las intuiciones y las preoperaciones topológicas precedían sensiblemente las operaciones proyectivas y afines, luego las métricas. Esto sorprendió fuertemente a mucha gente, por una doble razón: por un lado, esto mostraba con cuánta precaución había que examinar el paralelismo, por lo demás muy sugestivo entre la psicogénesis y la historia de las ciencias; pero sobre todo fue muy difícil admitir que la psicogénesis pudiera comenzar con la construcción de estructuras que corresponden a los más altos grados de generalidad formal, para encaminarse más tarde hacia la construcción de estructuras menos generales; lo que llevaba al encuentro de reacciones inmediatas por parte del sentido común de los epistemologistas. De hecho, la explicación de la paradoja aparente no es diferente de la que hemos desarrollado para las estructuras algebraicas, colocando las prioridades psicogenéticas en el orden de los completamientos operatorios, mientras que las prioridades históricas siguen el orden de las tematizaciones, siguiendo los grados de generalidad formal de las diferentes estructuras. Las intuiciones y preoperaciones del joven sujeto son, en efecto, integradas a continuación en estructuras más ricas (estructuras

proyectivas y afines, luego métricas), que el sujeto construye espontáneamente en el seno de un proceso manifiesto de completamiento operatorio; las etapas son retomadas mucho más tarde, pero en el sentido inverso, por el proceso de generalización formal que concierne a las estructuras geométricas.

No olvidemos tampoco que una generalización formal como la que va de la estructura de espacio métrico a la estructura, menos rica en comprensión, de los espacios topológicos, se apoya genéticamente sobre un completamiento categórico que va de la categoría de los espacios métricos a la de los espacios topológicos, mucho más rica. Esto explica en definitiva porqué la inversión puesta en evidencia por Piaget no es un resultado del azar de desarrollos contingentes.

INDICE

Esta edición se terminó de imprimir en los talleres gráficos de PREMIA editora de libros, s.a., en Tlahuapan, Puebla, en el segundo semestre de 1984. Los señores Angel Hernández Serafín Ascensio, Ignacio Hernández y Donato Arce tuvieron a su cargo el montaje gráfico y la impresión de la edición en offset. El tiraje fue de 1,500 ejemplares más sobrantes para reposición.